# Регата (с решениями)

## Младшая лига

### Первый тур

**1a.** Вычислите $ab + cd$, если $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$.

◻ *Ответ:* 0.

Заметим, что $ab+cd = ab+cd+ac+bd = (a+d)(b+c)$ и $ab+cd = ab+cd-ac-bd = (a-d)(b-c)$. Если одна из скобок $(a+d)$, $(b+c)$, $(a-d)$, $(b-c)$ равна нулю, то искомое значение равно нулю. Иначе среди этих скобок четное число отрицательных. Но $0 = a^2+b^2-c^2-d^2 = (a-d)(a+d)+(b-c)(b+c)$. Тогда $(a-d)(a+d) = -(b-c)(b+c)$. Отсюда следует, что четного числа отрицательных скобок среди этих четырех быть не может.

*Другое решение.* Умножив правую и левую часть равенства $ac + bd = 0$ на $ad + bc$, получим

$$(ac + bd)(ad + bc) = a^2cd + d^2ab + c^2ab + b^2cd = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) = 0\,,$$

а поскольку в условии задачи содержатся равенства $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, то $ab + cd = 0$.

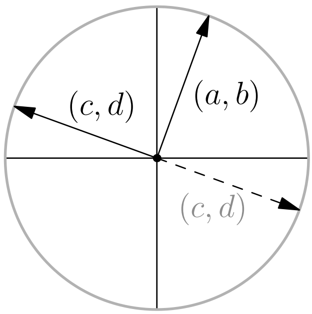


Рис. 1: к задаче 1a

*Ещё одно решение.* Условие $ac + bd = 0$ означает, что векторы $(a, b)$ и $(c, d)$ перпендикулярны. Условия $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$ означают, что это векторы длины 1 (рис. 1). Легко видеть, что либо $a = d$, $b = -c$, либо $a = -d$, $b = c$. В обоих случаях искомое равенство выполняется.

**1g.** Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых $AB$ и $BC$ отметили точки $E$ и $F$ таким образом, что $AF = AB$ и $CE = CB$, причем точки $E$ и $F$ не совпадают с $B$. Докажите, что $DE = DF$.

□ Рис. 2. Треугольник $DCE$ равен треугольнику $ABC$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезок $DE$ равен диагонали $AC$. Аналогично для треугольника $FAD$ и отрезка $DF$.

**1c.** Сколькими способами можно выбрать 3 различных натуральных числа от 1 до 100 так, чтобы их произведение делилось на 4?

□ *Ответ:* $\dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} - \dfrac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} - \dfrac{50 \cdot 49 \cdot 25}{2} = 111475.$

Всего вариантов выбрать три числа $100 \cdot 99 \cdot 98/6$. Вариантов выбрать три нечетных числа $50 \cdot 49 \cdot 48/6$. Вариантов выбрать две нечетных числа и одно четное, не делящееся на 4, $50 \cdot 49 \cdot 25/2$.

## Второй тур

**2a.** Пусть $x$ — натуральное число, $y$ — цифра. Известно, что

$$x(x+2) = \overline{\ldots 7y}.$$

Какие значения может принимать $y$?

□ *Ответ:* 5.

Пусть $R = \overline{\ldots 7y}$. Тогда $R + 1 = x(x+2) + 1 = (x+1)^2$. Тогда число $R + 1$ должно быть точным квадратом, то есть оканчиваться на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Последние две цифры $R + 1$ в этих случаях будут соответственно 80, 71, 74, 75, 76 и 79.

На 80 квадрат не может заканчиваться. 71, 74, 75 и 79 не подходят, так как в этих случаях $R$ дает остаток 2 или 3 при делении на 4, а точные квадраты дают остатки 0 или 1.

Для $\overline{\ldots 76}$ пример — $24^2$. Итого ответ $y = 5$ (например, для $x = 23$).

**2g.** Вершины выпуклого многоугольника расположены в узлах целочисленной решетки, причем ни одна из его сторон не проходит по линиям решетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий решетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме горизонтальных отрезков.

□ Для вертикальных отрезков считаем площадь как сумму площадей трапеций и треугольников с высотой 1 (рис. 3). Получаем $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot 1$. То же самое верно и для горизонтальных отрезков.

**2c.** На шахматной доске $8 \times 8$ произвольно проведена прямая. Какое наибольшее число клеток она может пересечь? (Пересечение считается только по внутренним точкам клеток.)

□ *Ответ:* 15.

*Оценка.* Отметим все точки пересечения проведенной прямой с линиями сетки шахматной доски. Отмеченные точки разбивают проведенную прямую на несколько отрезков (и два луча). Каждый отрезок проходит ровно по одной клетке шахматной доски. Следовательно, сосчитав отрезки, мы узнаем, сколько точек пересекает прямая.

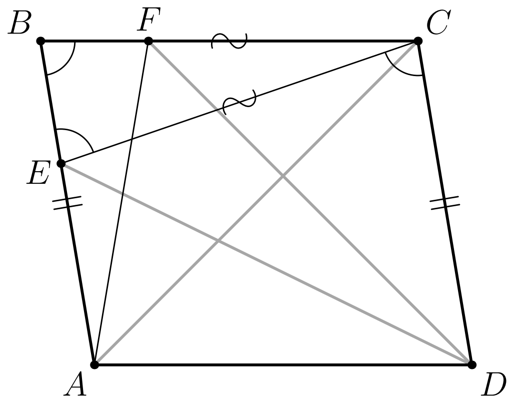


Рис. 2: к задаче 1g

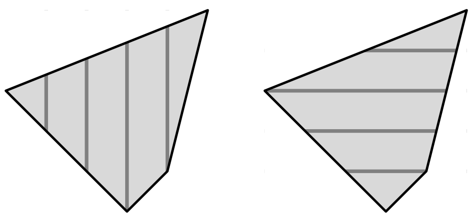

Рис. 3: к задаче 2g

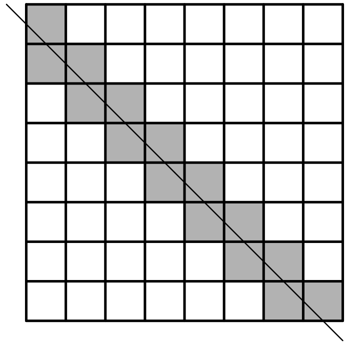

Рис. 4: к задаче 2c

Шахматная доска разделена на клетки 18 отрезками: 9 вертикалей и 9 горизонталей. С каждой из них проведенная прямая может пересекаться не более чем в одной точке, но из четырех границ, лишь с двумя. Следовательно, максимальное число точек пересечения — 16. Эти точки разбивают прямую не более чем на 15 отрезков.

*Пример* на рис. 4.

**Третий тур**

**3a.** Вычислите сумму

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\ldots+\frac{100}{98!+99!+100!}.$$

□ Заметим следующее тождество:

$$\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\frac{n}{(n-2)!\,(1+(n-1)+n(n-1))}=\frac{1}{n(n-2)!}=$$
$$=\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$$

Получаем

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{100}{98!+99!+100!}=$$
$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99!}-\frac{1}{100!}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{100!}.$$

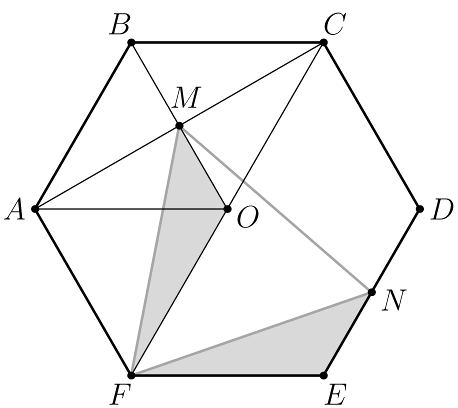


Рис. 5: к задаче 3g

**3g.** В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка $M$ — середина диагонали $AC$, $N$ — середина стороны $DE$. Докажите, что треугольник $FMN$ правильный.

□ Рис. 5. Пусть $O$ — центр шестиугольника. Легко видеть, что $ABCO$ — параллелограмм, и $M$ — его центр. Угол $FOM$ равен $120^\circ$, и равен углу $FEN$. Отрезок $FO$ равен стороне шестиугольника, и равен $FE$. Отрезок $OM$ равен половине стороны шестиугольника, и равен $EN$. Тогда треугольники $FOM$ и $FEN$ равны, и равны отрезки $FM$ и $FN$. С другой стороны, из равенства углов $OFM$ и $EFN$ следует, что угол $NFM$ равен $60^\circ$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| − | − | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + |
| + | + | − | − | − |
| − | − | + | + | + |
| − | − | + | + | + |
| − | − | + | + | + |

Рис. 6: к задаче 3c

**3c.** В таблице $n \times n$ в первых двух клетках верхнего ряда стоят минусы, а во всех остальных клетках плюсы (рис. 6). За одну операцию разрешается менять знак во всех клетках одного столбца или одной строки на противоположный. После применения нескольких операций оказалось, что в таблице стоит ровно 9 минусов. Какое наименьшее значение может принимать $n$?

□ *Ответ:* 5.

*Оценка.* $n = 3$ не подходит, поскольку есть квадрат $2 \times 2$, в котором всего 1 минус, а в каждом таком квадрате четность числа минусов не меняется. $n = 4$ не подходит, поскольку четность числа минусов во всей таблице не меняется.

*Пример* для $n = 5$ на рис. 6.

## Четвертый тур

**4a.** Положительные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geqslant 6\,.$$

□ Заметим, что $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca$. Тогда исходное неравенство переписывается как $9 - ab - bc - ca \geqslant 6$. Достаточно доказать $ab + bc + ca \leqslant 3$. Это следует из

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geqslant 3ab + 3ac + 3bc\,.$$

Это, в свою очередь, следует из известного неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, которое получается из $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geqslant 0$ раскрытием скобочек.

**4g.** $P$ и $Q$ — середины сторон $BC$ и $AD$ прямоугольника $ABCD$ соответственно. Диагонали прямоугольника $PQDC$ пересекаются в точке $R$. Оказалось, что $AP$ является биссектрисой угла $BAR$. Найдите длину стороны $BC$, если $AB = 1$.

□ *Ответ:* $2/\sqrt{3}$.

Рис. 7. Пусть прямая $AR$ пересекает прямую $BC$ в точке $X$. Тогда $BP = PC = CX$. Поэтому по свойству биссектрисы $AX : AB = PX : PB = 2 : 1$, откуда $AX = 2$. По теореме Пифагора получаем $BX = \sqrt{3}$, далее $BC = 2/3 \cdot BX = 2/\sqrt{3}$.

**4c.** Ежик в тумане может ходить по дугам окружностей целочисленного радиуса с центрами в точках с целочисленными координатами. Менять одну дугу на другую он может тоже только в целых точках. Может ли ежик за несколько таких переходов попасть из точки с координатами $(0, 0)$ в точку с координатами $(0, 1)$?

□ *Ответ:* нет, не может.

Рассмотрим очередной ход. Пусть вектор от исходной точки до центра окружности равен $(m_1, n_1)$, а вектор от центра окружности до конечной точки равен $(m_2, n_2)$ (рис. 8). Так как $r^2 = m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2$, то среди чисел $m_1, n_1, m_2, n_2$ всего четное число нечетных. Далее, так как сумма координат ежика изменилась на $m_1 + n_1 + m_2 + n_2$, то она сохранила свою четность.

Изначально сумма координат была четной, а в конце должна стать нечетной.

## Старшая лига

### Первый тур

**1a.** Найдите все натуральные $n$ такие, что для некоторого простого числа $p$ верно

$$p \leqslant \frac{n^2}{5} < p + 1\,.$$

□ *Ответ:* 4, 5, 6.

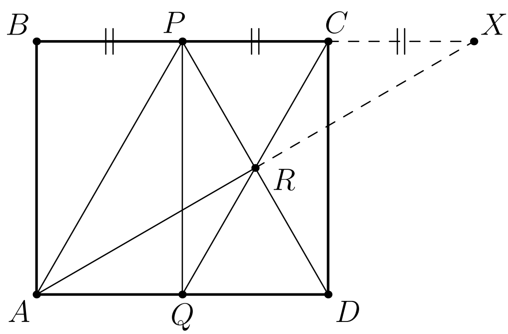


Рис. 7: к задаче 4g

Пусть $n = 5k+r$, где $r$ — остаток при делении на 5. Тогда $p = [n^2/5] = 5k^2+2kr+[r^2/5]$. Рассмотрим случаи.
$r = 0$. Тогда $p = 5k^2$, это число составное при $k > 1$.
$r = 1$. Тогда $p = 5k^2 + 2k = k \cdot (5k + 2)$ составное для $k > 1$.
$r = 2$. $p = 5k^2 + 4k = k \cdot (5k + 4)$ составное для $k > 1$.
$r = 3$. $p = 5k^2 + 6k + 1 = (k + 1) \cdot (5k + 1)$ составное для $k > 0$.
$r = 4$. $p = 5k^2 + 8k + 3 = (k + 3) \cdot (5k + 1)$ составное для $k > 0$.
Осталось проверить $n = 5, 1, 6, 2, 7, 3, 4$.

**1g.** Дан треугольник $ABC$ с прямым углом $C$. Найдите на гипотенузе $AB$ все точки $X$ такие, что $CX^2 = AX \cdot BX$.

□ *Ответ:* середина гипотенузы и основание высоты из точки $C$.

Из свойств медианы и высоты к гипотенузе прямоугольного треугольника следует, что обе указанные точки подходят. Докажем, что других нет.

Рис. 9. Пусть $H$ — основание высоты $CH$ треугольника, $M$ — основание медианы $CM$. Тогда $CX^2 = CH^2 + HX^2$, а $AX \cdot BX = (AH + HX) \cdot (BH - HX)$, если длину $HX$ считать положительной, когда $X$ на отрезке $HB$, и отрицательной иначе. Тогда $CH^2 + HX^2 = (AH + HX) \cdot (BH - HX)$ — это квадратное уравнение на $HX$. Раскрыв скобки и сократив $CH^2$ с $AH \cdot BH$, получаем $2HX^2 = HX \cdot (BH - AH)$. Корень $HX = 0$ соответствует основанию высоты, а $HX = (BH - AH)/2$, как несложно видеть, — середине стороны.

*Другое решение.* Рис. 10. Продлим $CX$ до пересечения с описанной окружностью треугольника $ABC$ в точке $Y$, получим $CX \cdot YX = AX \cdot BX = CX^2$, откуда $YX = CX$. Это означает, что $Y$ находится на том же расстоянии от прямой $AB$, что и точка $C$. Получаем не более двух решений, и одно в случае равнобедренного прямоугольного треугольника.

**1c.** Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет нуля, а любые две цифры различны и не имеют общих делителей, кроме единицы?

□ *Ответ:* $6 \cdot 5! = 720$.

Найдем количество наборов различных попарно взаимно простых цифр. Из цифр 2, 4, 6, 8 может участвовать ровно одна. Из цифр 3, 6, 9 также ровно одна. Кроме этого, могут участвовать цифры 1, 5 и 7. Значит, из каждой из первых двух групп должно быть ровно по одному числу. Отсюда ясно, что 6 участвовать не может. Значит, можно выбрать

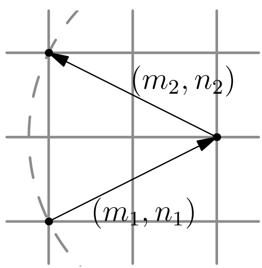


Рис. 8: к задаче 4c

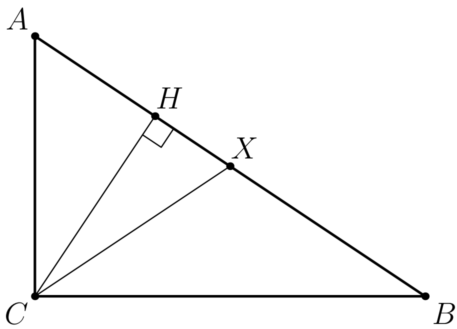


Рис. 9: к задаче 1g

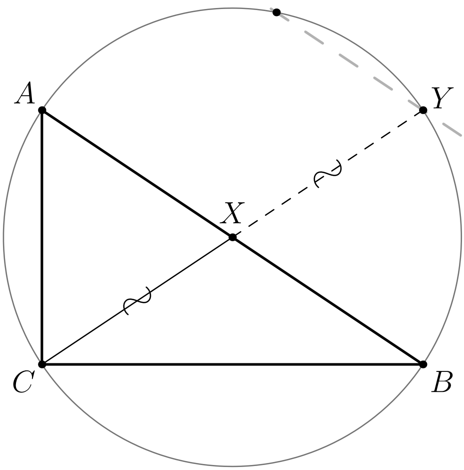


Рис. 10: к задаче 1g

любую из степеней двойки (три варианта), любую степень тройки (два варианта), а также 1, 5 и 7. Всего 6 вариантов.

Пять цифр образуют пятизначное число 5! способами.

**Второй тур**

**2a.** Докажите, что если какая-нибудь пара действительных чисел $x$ и $y$ удовлетворяет уравнениям

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0\,,$$

то эта же пара чисел удовлетворяет уравнению

$$xy - 12x + 15y = 0\,.$$

□ Разложим первое равенство на множители:

$$(x - y)(x - 2y + 1) = 0\,.$$

Тогда либо $x = y$, либо $x = 2y - 1$.
*(1)* Подставим $x = y$ во второе равенство, получаем $2y = 0$. Тогда $x = y = 0$, что действительно удовлетворяет искомому равенству.
*(2)* Подставим $x = 2y - 1$ во второе равенство, получаем $y^2 - 5y + 6 = 0$. Отсюда либо $y = 2$, $x = 3$, либо $y = 3$, $x = 5$. Подстановкой убеждаемся, что обе пары подходят.

*Другое решение.* Рассмотрим следующее тождество:

$$(x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y) \cdot (x - y - 9) + (x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7u) \cdot (-x + 2y + 3) = \\ = 2(xy - 12x + 15y).$$

В справедливости его нетрудно убедиться, раскрыв скобки. Если какая-нибудь пара значений $x$ и $y$ удовлетворяет двум исходным уравнениям, то левая часть тождества также обращается в нуль. Следовательно, правая часть тождества также обращается в нуль, а это значит, что $x$ и $y$ удовлетворяют третьему уравнению.

**2g.** В треугольнике $ABC$ точка $O$ — центр вневписанной окружности, которая касается стороны $BC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$ и центр описанной окружности треугольника $ABO$ лежат на одной окружности.

□ Рис. 11. Пусть $L$ — центр описанной окружности треугольника $AOB$. Так как центральный угол в два раза больше вписанного, получаем

$$\angle ALB = 2\angle AOB = 2(180^\circ - \angle ABO) - 2\angle BAO = \\ = (180^\circ - \angle ABC) - \angle BAC = \angle ACB\,.$$

**2c.** В 10-серийном сериале нет персонажа, который встречается во всех сериях. Известно, что в любых 6 сериях есть общий персонаж. Какое наименьшее количество персонажей может быть в таком сериале?

□ *Ответ:* 7.

*Оценка.* Шесть или меньше персонажей быть не может. Действительно, в этом случае можно для каждого персонажа рассмотреть серию, в которой его нет. Получится не более 6 серий. Дополнив их до 6 серий произвольным образом, мы получим шесть серий без общего персонажа.

*Пример* для семи персонажей: первый участвует во всех сериях, кроме первой, второй персонаж — во всех, кроме второй, и. т. д. В последних трех сериях участвуют все.

**Третий тур**

**3a.** Про действительные числа $x$, $y$, $z$ известно, что

$$x + y + z = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 6\,.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $|(x - y)(y - z)(x - z)|$?

□ *Ответ:* $6\sqrt{3}$.

Выражая $z = -(x + y)$ из первого равенства и поставляя во второе, получаем $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 6$, т. е. $x^2 + xy + y^2 = 3$. Аналогично $y^2 + yz + z^2 = 3$ и $x^2 + xz + z^2 = 3$. Кроме того, $(x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 2xy + 2xz + 2yz$, откуда $xy + xz + yz = -3$.

Преобразуем

$$\begin{aligned}(x-y)^2(y-z)^2(x-z)^2 &= (3-3xy)(3-3yz)(3-3xz) = \\ &= 27(1 - xy - yz - xz + x^2yz + xy^2z + xyz^2 - x^2y^2z^2) = \\ &= 27(4 - (xyz)^2) \leqslant 108\,.\end{aligned}$$

Равенство достигается при $xyz = 0$, например, при $x = 0$, $y = \sqrt{3}$, $z = -\sqrt{3}$.

*Другое решение.* Как и в предыдущем, выведем $xy + xz + yz = -3$. Пусть $w = xyz$. Тогда по т. Виета числа $x$, $y$, $z$ являются корнями уравнения $t^3 - 3t = w$.

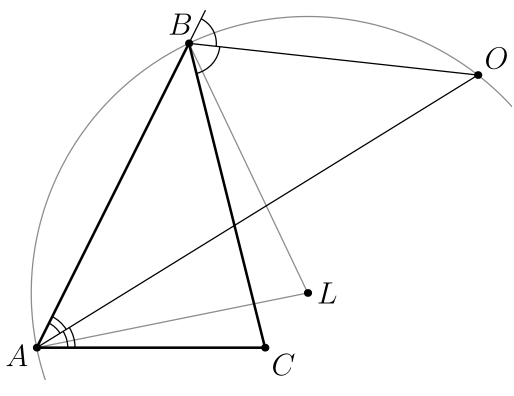


Рис. 11: к задаче 2g

Так как выражение $R = (x-y)^2(y-z)^2(x-z)^2$ является симметрическим, то оно выражается как многочлен $R(w)$, причем не более чем второй степени. При замене $x, y, z$ на $-x, -y, -z$ значение $w$ меняется на противоположное, а $R$ не меняется, то есть $R$ является четным многочленом от $w$. Наконец, $R$ равно нулю, когда $w$ совпадает со значениями локального максимума и локального минимума функции $t^3 - 3t$, и $R$ положительно на отрезке между этими значениями.

Получаем, что $R$ — четный квадратный трехчлен с ветвями вниз, и его максимум достигается при $w = 0$, то есть при $x = 0$, $y = \sqrt{3}$, $z = -\sqrt{3}$.

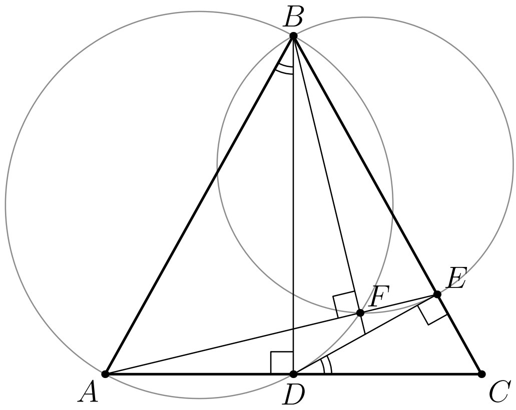


Рис. 12: к задаче 3g

**3g.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) точка $D$ — середина основания $AC$, $E$ — основание перпендикуляра из точки $D$ на сторону $BC$, $F$ — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника $ADB$ и отрезка $AE$. Докажите, что прямая $BF$ проходит через середину отрезка $DE$.

□ Пусть $X$ — пересечение прямых $BF$ и $DE$.

Рис. 12. Прямая $BE$ является радикальной осью окружностей, описанных вокруг $ADB$ и $BFE$, а $DE$ — их общая касательная.

*Другое решение.* Рис. 13. Опустим перпендикуляр $AL$ на $BC$. Легко видеть, что $AE$ — медиана треугольника $ALC$. Треугольники $ALC$ и $BED$ подобны, так как их стороны соответственно перпендикулярны. Отрезки $AE$ и $BX$ тоже перпендикулярны, а значит, являются соответствующими элементами в этих треугольниках. Значит, $BX$ — медиана в треугольнике $BED$.

**3c.** На плоскости расположено 2016 правильных треугольников (не обязательно равных). На какое наибольшее число частей они могут разбивать плоскость?

□ *Ответ:* $2 + 3 \cdot 2016 \cdot 2015$.

Будем добавлять треугольники по одному. Изначально часть одна, для одного треугольника их две. Каждый следующий треугольник добавляет частей не больше, чем участков, на которые разбита его граница. Два треугольника пересекаются не более чем в шести точках, так как отрезок перекает границу выпуклой фигуры не более чем в друх

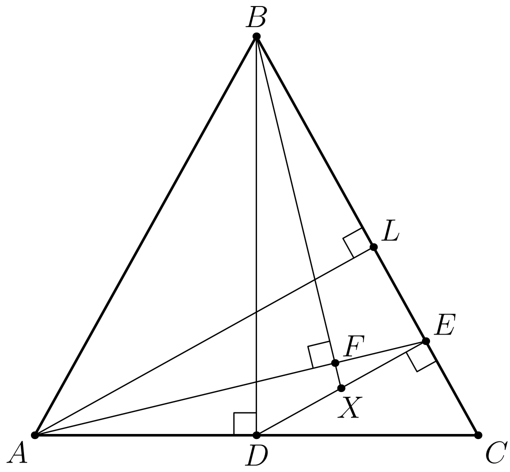


Рис. 13: к задаче 3g

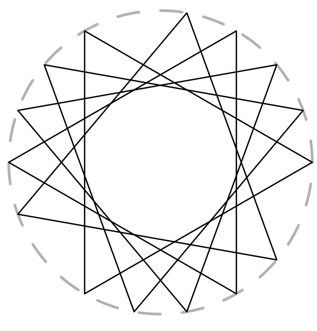

Рис. 14: к задаче 3c

точках. Значит, участков границы не более $6 \cdot k$, где $k$ — количество ранее добавленных треугольников.

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^{2015} 6 \cdot k = 2 + 6 \cdot 2015 \cdot 2016/2\,.$$

*Пример* на рис. 14. Каждой части, кроме внутренней и внешней, можно сопоставить некоторое пересечение двух треугольников (например, самое «правое», если смотреть из центра). Отсюда легко получается формула для количества частей.

## Четвертый тур

**4a.** Дана произвольная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличная от константы. Докажите, что найдутся такие $x, y \in \mathbb{R}$, что $f(x + y) < f(xy)$.

□ Предположим, что утверждение неверно, то есть для любых действительных $x$ и $y$ выполнено $f(x + y) \geqslant f(xy)$. Сначала подставим $y = 0$. Получаем $f(x) \geqslant f(0)$ для всех $x$, то есть в точке 0 у функции $f$ глобальный минимум.

Далее, подставим $y = -x$. Получаем $f(0) \geqslant f(-x^2)$ для всех $x$, то есть во всех отрицательных точках у $f$ также минимум.

Наконец, для произвольно положительного $t$ подставим $x = y = -\sqrt{t}$. Получаем $f(-2\sqrt{t}) \geqslant f(t)$. Значит, минимум распространяется и на все положительные аргументы $f$, то есть $f$ — константа. Противоречие.

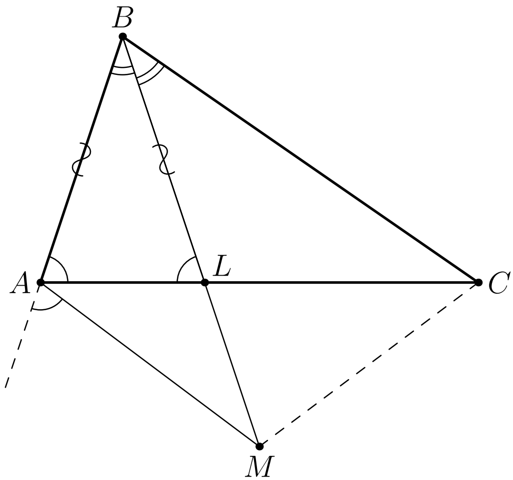


Рис. 15: к задаче 4g

**4g.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BL$. Известно, что $BL = AB$. На продолжении $BL$ за точку $L$ выбрана точка $M$ такая, что $\angle BAM + \angle BAL = 180^\circ$. Докажите, что $BM = BC$.

□ Рис. 15. Пусть $\angle LAB = \angle BLA = \alpha$. Тогда $\angle BAM = 180^\circ - \alpha = \angle BLC$. С другой стороны, $\angle ABL = \angle MBC$. Кроме того, $AB = LB$. Следовательно, треугольники $ABM$ и $LBC$ равны. Отсюда и равенство $BM$ и $BC$.

**4c.** По кругу лежат 2016 шаров, каждый из которых покрашен в один из 32 цветов, причем шаров каждого цвета ровно 63. Найдите наименьшее $n$ с таким условием: гарантированно найдутся $n$ последовательных шаров, среди которых встречается хотя бы 16 цветов.

□ *Ответ:* $14 \cdot 63 + 2$.

*Оценка.* Докажем, что указанного $n$ всегда хватит. Пусть шары расставлены некоторым образом. Если в каждой последовательности $n$ шаров встречаются все цвета, то всё хорошо. Пусть не так; без ограничения общности предполагаем, что в некоторой последовательности длины $n$ нету цвета $A$. Но где-то на круге он есть. Если мы будем сдвигать нашу последовательность на 1, то в конце концов наткнемся на цвет $A$. В полученной последовательности длины $n$ этот цвет встречается ровно один раз. По принципу Дирихле, среди оставшихся $14 \cdot 63 + 1$ должны быть еще по крайней мере 15 цветов.

*Пример:* расставим шары так, что все шары одного цвета идут подряд, однотонными сегментами по 63. Тогда любая последовательность длины $14 \cdot 63 + 1$ или меньше будет перекрываться не более чем с 15 сегментами.