

Комбинаторика и логика

Младшая лига

1. На доске нарисован правильный 2016-угольник. Петя провел в нем несколько диагоналей так, что он распался на треугольники. Каких треугольников могло получиться больше и на сколько: тех, у кого стороны не совпадают со сторонами 2016-угольника, или тех, у кого две стороны совпадают со сторонами 2016-угольника?
2. Можно ли на клетчатой доске 2016×2016 расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали (включая одноклеточные) стояло нечетное количество фишек?
3. У старого короля есть три сына близнеца. У первого сына есть два наследника, у второго — три, а у третьего — пять. Всем известно, что старый король скоро объявит, какой именно сын сменит его на престоле. На какое наименьшее количество провинций можно разделить королевство так, чтобы при любом выборе старого короля, новый король мог бы раздать все округа своим наследникам, и каждому из них досталась бы территория одинаковой площади?
4. В ряд стоят 100 толстяков. Масса любых двух подряд идущих отличается не более чем на 1 кг. Докажите, что их можно рассадить в автоколонну из 25 одинаковых машин (по 4 человека в машину) так, чтобы масса любых двух подряд идущих «груженых» машин также отличалась не более чем на 1 кг.
5. Каждый школьник решил одну из 20 задач по математике и одну из 11 задач по физике. Известно, что у любых двух студентов наборы задач не совпадают. При этом для каждого школьника верно следующее: какую-то из тех двух задач, которые он решил, решило еще не более одного школьника. Каково наибольшее возможное количество школьников?

Старшая лига

1. Пусть S — множество всех разбиений числа 2000 в сумму натуральных слагаемых. Для каждого разбиения $p \in S$ обозначим через $f(p)$ сумму количества слагаемых и максимального числа в разбиении. Найдите минимальное значение $f(p)$.
2. Можно ли на клетчатой доске 2016×2016 расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали (включая одноклеточные) стояло нечетное количество фишек?
3. В ряд стоят 100 толстяков. Масса любых двух подряд идущих отличается не более чем на 1 кг. Докажите, что их можно рассадить в автоколонну из 25 одинаковых машин (по 4 человека в машину) так, чтобы масса любых двух подряд идущих «груженых» машин также отличалась не более чем на 1 кг.
4. В двух клетках таблицы $n \times n$ стоит знак «−», в остальных «+». За один ход разрешается выбрать любую строчку или столбец и поменять в ней все знаки на противоположные.

После нескольких ходов оказалось, что в таблице ровно 9 знаков «-». При каком максимальном n такое могло получиться?

5. В одном государстве некоторые города соединены двусторонними авиалиниями, причем число авиалиний ровно в 5 раз больше числа городов. Докажите, что количество двусторонних авиамаршрутов ровно с одной пересадкой не менее чем в 45 раз превосходит число городов. (*Двусторонний авиамаршрут* означает, что маршруты $A-B-C$ и $C-B-A$ считаются за один. Концы маршрута всегда различны.)