Комбинаторика и логика (с решениями)

Младшая лига

1. На доске нарисован правильный 2016-угольник. Петя провел в нем несколько диагоналей так, что он распался на треугольники. Каких треугольников могло получиться больше и на сколько: тех, у кого стороны не совпадают со сторонами 2016-угольника, или тех, у кого две стороны совпадают со сторонами 2016-угольника?

□ *Ответ:* треугольников второго вида на 2 больше.

Есть три вида треугольников: те, у кого стороны не совпадают со сторонами многоугольника (пусть их x), те, у кого ровно одна сторона совпадает со стороной многоугольника (пусть их y) и те, у кого две стороны совпадают со сторонами многоугольника (пусть их z). Из триангуляции следует, что общее количество треугольников — $2014 = x + y + z$. Кроме этого общее количество сторон многоугольника — $2016 = y + 2z$. Из этого следует, что при любом разбиении $z - x = (y + 2z) - (x + y + z) = 2016 - 2014 = 2$.

2. Можно ли на клетчатой доске 2016×2016 расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали (включая одноклеточные) стояло нечетное количество фишек?

□ *Ответ:* нельзя.

Предположим, что можно. Покрасим клетки доски в шахматную раскраску и проследим за черным цветом. Заметим, что черных диагоналей одного из направлений четное количество, а другого нечетное. Тогда с одной стороны на черных клетках стоит четное количество фишек, а с другой — нечетное. Значит требуемая расстановка невозможна.

3. У старого короля есть три сына близнеца. У первого сына есть два наследника, у второго — три, а у третьего — пять. Всем известно, что старый король скоро объявит, какой именно сын сменит его на престоле. На какое наименьшее количество провинций можно разделить королевство так, чтобы при любом выборе старого короля, новый король мог бы раздать все округа своим наследникам, и каждому из них досталась бы территория одинаковой площади?

□ *Ответ:* 8.

Пусть площадь всего королевства равна 30. Нам необходимо уметь делить его на 5 равных частей. Получается, что площадь каждой провинции не должна превосходить $6 = 30 : 5$. Из этого следует, что 6 провинций будет недостаточно (иначе при разбиении на 5 равных частей, четыре части будут содержать ровно по одной провинции, тогда у нас будет хотя бы четыре провинции площадью 6, что противоречит возможности разбить на три равные части всё королевство).

Предположим, что возможно разделить королевство на семь провинций, тогда из аналогичных рассуждений следует, что есть хотя бы три провинции площадью 6. Но, как мы доказали выше, четырех провинций площадью 6 быть не может, получается, что их ровно три.

Из возможности разбиения на три равные части следует, что среди оставшихся четырех провинций есть две провинции площадью 4. И что сумма площадей двух оставшихся провинций также равна 4. Чтобы в итоге все провинции можно было разбить на пять равных частей, необходимо, чтобы две последние провинции имели площадь 2. Получилось, что площади всех провинций — четна. И это противоречит разбиению на две равные части (по 15).

Пример для восьми провинций: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6.

4. В ряд стоят 100 толстяков. Масса любых двух подряд идущих отличается не более чем на 1 кг. Докажите, что их можно рассадить в автоколонну из 25 одинаковых машин (по 4 человека в машину) так, чтобы масса любых двух подряд идущих «груженных» машин также отличалась не более чем на 1 кг.

□ Переставим толстяков в ряд по весу: от самого легкого к самому тяжелому. Пусть их веса будут $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. При этом масса любых двух подряд идущих толстяков будет отличаться не более чем на 1 кг. Действительно, если это не так, пусть нашлись такие толстяки a_i и a_{i+1}, что $a_{i+1} > a_i + 1$. Назовем толстяков $a_1, a_2, \dots, a_i$ первой частью, а остальных — второй частью. Понятно, что в исходном ряду найдутся два соседа из разных частей. Но тогда их веса отличаются более, чем на 1.

Разобьем толстяков на 4 группы: $a_1, \dots, a_{25}, a_{26}, \dots, a_{50}, a_{51}, \dots, a_{75}, a_{76}, \dots, a_{100}$. Посадим в i-ую машину толстяка a_i, а потом будем подсаживать толстяков из второй группы следующим образом: в i-ую машину подсадим к толстяку a_i толстяка a_{51-i}. Проверим, что веса соседних машин будут отличаться не более, чем на 1: $a_i + a_{51-i} \geqslant a_i + a_{50-i} \geqslant a_{i+1} + a_{50-i} - 1$ с одной стороны и $a_i + a_{51-i} \leqslant a_{i+1} + a_{51-i} \leqslant a_{i+1} + a_{50-i} + 1$ с другой. Теперь можно упорядочить машины по весу, и провести аналогичную процедуру подсаживания с третьей группой толстяков (в i-ую машину в новом, упорядоченном ряду, подсаживаем толстяка a_{76-i}). Затем опять упорядочиваем и подсаживаем 4-ую группу.

5. Каждый школьник решил одну из 20 задач по математике и одну из 11 задач по физике. Известно, что у любых двух студентов наборы задач не совпадают. При этом для каждого школьника верно следующее: какую-то из тех двух задач, которые он решил, решило еще не более одного школьника. Каково наибольшее возможное количество школьников?

□ *Ответ:* 54.

Построим двудольный граф, в котором вершины верхней доли будут соответствовать задачам по математике, вершины нижней доли будут соответствовать задачам по физике, а ребро между вершинами - школьнику, который решил эти задачи. Так как у любых двух школьников наборы задач не совпадают, то граф получится без кратных ребер. Также из условия следует, что для любого ребра степень одной из его вершин не больше двух.

Пример. Приведем пример графа с наибольшим количеством ребер. В верхней доле вершины 1 и 2 соединены со всеми вершинами 1-9 из нижней доли, а вершины 3–20 из верхней доли соединены с вершинами 10 и 11 каждая (других ребер нет). Всего ребер здесь $2(20-2+11-2)=54$.

Оценка. Докажем, что больше ребер быть не может. Пусть в верхней доле k вершин степени больше 2 (множество A), а в нижней таких вершин l (множество B). Соответственно, в верхней доле $20-k$ вершин степени не больше 2 (множество C), а в нижней $11-l$ (множество D). Заметим, что между частями A и B ребер быть не может. Из C выходит не более $2(20-k)$ ребер, из D не более $2(11-l)$ ребер. Значит всего ребер не более $2(31-k-l)$.

Если $k=0$, то все вершины в верхней доле степени не больше 2, т. е. ребер не больше 40. Аналогично, если $l=0$, то ребер не больше 22. Если $k=1$, $l=2$, то ребер между частями A и D ребер не более 9 (т. к. в части A одна вершина, в части C 9 вершин), остальные ребра выходят из части B и их не более $19\cdot 2=38$, т. е. всего не более 47 ребер. Если же $k=2$, $l=1$, то между частями B и C не более 18 ребер, остальные ребра из D и их не более $10\cdot 2=20$, т. е. всего не более 38 ребер. Наконец, если $k=1$, $l=1$, то между частями A и D ребер не более 10, остальные рёбра выходят из C и их не более $19\cdot 2=38$, т. е. не более 48. В остальных случая $k+l\geqslant 4$, а значит ребер не более 54.

Старшая лига

1. Пусть S — множество всех разбиений числа 2000 в сумму натуральных слагаемых. Для каждого разбиения $p\in S$ обозначим через $f(p)$ сумму *количества слагаемых* и *максимального числа* в разбиении. Найдите минимальное значение $f(p)$.

□ *Ответ:* 90.

Пусть x — максимальное число, а y — количество слагаемых в разбиении p. Тогда понятно, что $xy\geqslant 2000$.

При этом $f(p)=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 2\sqrt{2000}>89$. То есть $f(p)$ не меньше 90. А 90 оно равняться может; например, если у нас 40 слагаемых, каждое из которых равно 50.

2. Можно ли на клетчатой доске 2016×2016 расставить несколько фишек так, чтобы на каждой диагонали (включая одноклеточные) стояло нечетное количество фишек?

□ *Ответ:* нельзя.

Предположим, что можно. Покрасим клетки доски в шахматную раскраску и проследим за черным цветом. Заметим, что черных диагоналей одного из направлений четное количество, а другого нечетное. Тогда с одной стороны на черных клетках стоит четное количество фишек, а с другой — нечетное. Значит, требуемая расстановка невозможна.

3. В ряд стоят 100 толстяков. Масса любых двух подряд идущих отличается не более чем на 1 кг. Докажите, что их можно рассадить в автоколонну из 25 одинаковых машин (по 4 человека в машину) так, чтобы масса любых двух подряд идущих «груженных» машин также отличалась не более чем на 1 кг.

□ Переставим толстяков в ряд по весу: от самого легкого к самому тяжелому. Пусть их веса будут $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. При этом масса любых двух подряд идущих толстяков будет отличаться не более чем на 1 кг. Действительно, если это не так, пусть нашлись такие толстяки a_i и a_{i+1}, что $a_{i+1} > a_i + 1$. Назовем толстяков $a_1, a_2, \ldots, a_i$ первой частью, а остальных — второй частью. Понятно, что в исходном ряду найдутся два соседа из разных частей. Но тогда их веса отличаются более, чем на 1.

Разобьем толстяков на 4 группы: $a_1, \ldots, a_{25}, a_{26}, \ldots, a_{50}, a_{51}, \ldots, a_{75}, a_{76}, \ldots, a_{100}$. Посадим в i-ую машину толстяка a_i, а потом будем подсаживать толстяков из второй группы следующим образом: в i-ую машину подсадим к толстяку a_i толстяка a_{51-i}. Проверим, что веса соседних машин будут отличаться не более, чем на 1: $a_i + a_{51-i} \geqslant a_i + a_{50-i} \geqslant a_{i+1} + a_{50-i} - 1$ с одной стороны и $a_i + a_{51-i} \leqslant a_{i+1} + a_{51-i} \leqslant a_{i+1} + a_{50-i} + 1$ с другой. Теперь можно упорядочить машины по весу, и провести аналогичную процедуру подсаживания с третьей группой толстяков (в i-ую машину в новом, упорядоченном ряду, подсаживаем толстяка a_{76-i}). Затем опять упорядочиваем и подсаживаем 4-ую группу.

4. В двух клетках таблицы $n \times n$ стоит знак «$-$», в остальных «$+$». За один ход разрешается выбрать любую строчку или столбец и поменять в ней все знаки на противоположные. После нескольких ходов оказалось, что в таблице ровно 9 знаков «$-$». При каком максимальном n такое могло получиться?

◻ *Ответ:* 11.

Понятно, что если какая-то строчка или столбец меняется дважды (не обязательно соседними ходами), то эти ходы «сокращают» друг друга и никак не влияют на итоговое количество минусов и плюсов в таблице. Таким образом, мы можем считать, что каждую строчку и каждый столбец меняли не более одного раза.

Оценка. Проделаем те же действия с доской из всех плюсов. Тогда мы получим не более 11 минусов. Пусть мы меняли x строчек и y столбцов. Тогда в таблице будет $xy + (n - x)(n - y)$ плюсов и $x(n - y) + y(n - x)$ минусов. Разность между количеством плюсов и количеством минусов равна $(n - 2x)(n - 2y)$ и должна быть не меньше $n^2 - 22$.

Если хотя бы одно из чисел x и y не равно нулю и не равно n, то $(n - 2x)(n - 2y) \leqslant n(n - 2) = n^2 - 2n$, откуда $2n \leqslant 22$, то есть $n \leqslant 11$.

Пример для $n = 11$ построить совсем просто. Пусть в начале оба минуса стояли в первой строчке, и мы сделали ровно один ход, изменив как раз первую строчку.

5. В одном государстве некоторые города соединены двусторонними авиалиниями, причем число авиалиний ровно в 5 раз больше числа городов. Докажите, что количество двусторонних авиамаршрутов ровно с одной пересадкой не менее чем в 45 раз превосходит число городов. (*Двусторонний авиамаршрут* означает, что маршруты $A{-}B{-}C$ и $C{-}B{-}A$ считаются за один. Концы маршрута всегда различны.)

◻ Пусть у нас всего n городов. Занумеруем города от 1 до n и обозначим через x_i - количество авиалиний, выходящих из города i. Тогда маршрутов, с пересадкой в горде i, ровно $\mathrm{C}_{x_i}^2$ штук. То есть всего маршрутов с одной пересадкой

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{x_i}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2}.$$

Заметим, что количество авиалиний в стране равно $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/2 = 5n$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим следует, что сумма квадратов не меньше квадрата суммы, деленного на n. Получаем

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{2n} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2} = \frac{100n}{2} - \frac{10n}{2} = 45n.$$