§1. Задачи с целыми числами.

Задачи.

Все задачи выполняются без калькулятора.

1. В числе $\overline{12{*}456789}$ одна цифра заменена на $*$. Перечислить все цифры, какие можно поставить вместо $*$ так, чтобы число $\overline{12{*}456789}$ делилось на 3.

2. Доказать признак делимости на 4: натуральное число a делится на 4 тогда и только тогда, когда две последние цифры составляют число, делящееся на 4.

3. Доказать признак делимости на 9: число a делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 9.

4. Доказать, что следующие числа являются составными:

$$\begin{gathered} 441 \\ 529 \\ 841 \\ 11232447, \\ 15^{15} - 3^3, \\ 1661, \\ 3737, \\ 373737. \end{gathered}$$

5. Делится ли число 5432112345 на 11?

6. Делится ли сумма чисел $1, 2, \ldots, 100$ на 3, 9, 4, 8?

7. Доказать, что число 307 является простым.

8. Найдите все трехзначные числа, превышающие сумму своих цифр в 6 раз.

9. Докажите, что если к произвольному трехзначному числу приписать справа его же, то полученное шестизначное число будет делиться на 7.

10. Число $\overline{54ab}$ делится на 33. Найти цифры a, b.

11. Число $\overline{7a53bc}$ делится на 132. Найти цифры a, b, c.

12. При каких a и b число $\overline{aabb}$ является квадратом натурального числа?

Ответы к задачам. (1) 0, 3, 6, 9; (3) аналогично признаку делимости на 2; (4) $441 = 21^2$, $529 = 23^3$, $841 = 29^2$, $11232447 \vdots 3$ (сумма цифр делится на 3), $15^{15} - 3^3$ — четное, $1661 = 11 \cdot 151$, $3737 = 37 \cdot 101$, $373737 = 37 \cdot 10101$; (5) да (признак делимости на 11); (6) нет, нет, нет, нет; (7) проверить делимость на простые числа от 3 до 17; (8) таких нет; (9) воспользоваться тем фактом, что 1001 делится на 7; (10) 5412, 5445, 5478; (11) 795300, 775368, 765336, 755304, 735372, 725340, 715308; (12) $a = 7$, $b = 4$ ($\overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b}$, следовательно, $\overline{a0b} = 11 \cdot n^2$, причем n может быть равно 4, 5, 6, 7, 8, 9; перебором выясняем, что подходит только 8).