## §1. Задачи с целыми числами.

Напомним некоторые понятия.

Натуральными называются числа, которые используются для счета предметов или обозначения номера предмета в ряду однородных предметов: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Целые числа — множество, образованое добавлением к множеству натуральных чисел числа нуль и отрицательных чисел: ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Натуральное число $p$ называется *простым,* если имеет ровно два натуральных делителя: 1 и $p$. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Натуральное число $n$ называется *составным,* если существуют натуральные числа $a > 1$ и $b > 1$, такие что $n = ab$. Иначе говоря, если натуральное число $n \geq 2$ не является простым, то оно составное.

Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 97 — простые, а числа 4, 6, 8, 9, 91 — составные.

**Задача 1.** Является ли число 111 простым?
*Ответ:* нет, не является, так как $111 = 3 \cdot 37$.

Тот факт, что число $a$ делится на $b$, будем обозначать $a \vdots b$ (например: $24 \vdots 6$, $33 \vdots 3$).

Определить, является ли число составным, могут помочь признаки делимости на 2, на 3, на 4, на 5, на 8, на 9, на 10 и на 11. Есть также признак делимости на 7, но он слишком сложный и обычно не используется. Число делится:

- на 2 $\Leftrightarrow$ число четное;
- на 3 $\Leftrightarrow$ сумма цифр числа делится на 3,
(*например,* 234 *делится на* 3, *т.к.* $2+3+4=9 \vdots 3$);
- на 4 $\Leftrightarrow$ две последние цифры составляют число, делящееся на 4,
(*например,* $5432 \vdots 4$, *т.к.* $32 \vdots 4$);
- на 5 $\Leftrightarrow$ число оканчивается либо нулем, либо цифрой 5;
- на 9 $\Leftrightarrow$ сумма цифр числа делится на 9;
- на 11 $\Leftrightarrow$ модуль суммы цифр, стоящих на четных местах и суммы цифр стоящих на нечетных местах, делиться на 11,
(*например,* $1526371 \vdots 11$, *т.к.* $|1+2+3+1-5-6-7| = |7-18| = 11 \vdots 11$).

**Задача 2.** Придумайте признаки делимости на 6, на 8 и на 10.

Поговорим о том, как доказывать признаки делимости. Для этого нужно научиться обозначать цифры числа. Будем это делать следующим образом: запись $a = \overline{a_2a_1a_0}$ означает, что $a$ — трехзначное число, состоящее из цифр $a_2$, $a_1$, $a_0$. Мы поставили черту над цифрами, для того чтобы не путать с произведением чисел $a_2 \cdot a_1 \cdot a_0$.

У записи $\overline{a_2a_1a_0}$ есть недостаток: ее неудобно использовать в вычислениях. Как это исправить: число $\overline{a_2a_1a_0}$ можно записать так: $\overline{a_2a_1a_0} = 100a_2 + 10a_1 + a_0$. Например, $45 = 10 \cdot 4 + 5$, или $1024 = 1000 \cdot 1 + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 2 + 4$.

В общем случае запись $a = \overline{a_na_{n-1} \ldots a_2a_1a_0}$ означает, что $a$ — $n+1$-значное число, состоящее из цифр $a_n$, $a_{n-1}$, ... $a_2$, $a_1$, $a_0$. Его можно записать также $a = 10^na_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$.

**Задача 3.** Доказать признак деления на 3: натуральное число $a$ делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа $a$ делится на 3.

*Решение.* Пусть $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — цифры числа $a$. Тогда

$$a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 100a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Преобразуем сумму:

$$\begin{aligned} a = (10^n{-}1)a_n + \ldots + (100{-}1)a_2 + (10{-}1)a_1 \; + \; (a_n{+}\ldots{+}a_2{+}a_1{+}a_0) = \\ = 99\ldots9a_n + \ldots + 99a_2{+}9a_1 \; + \; (a_n{+}\ldots{+}a_2{+}a_1{+}a_0). \end{aligned}$$

Все слагаемые делятся на 3, кроме, возможно, последнего слагаемого, которое взято в скобки. Следовательно, $a$ делится на 3 тогда и только тогда, когда слагаемое в скобках делится на 3.

Например, для трехзначного числа $\overline{a_2 a_1 a_0}$:

$$\overline{a_2 a_1 a_0} = 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 99a_2 + 9a_1 + (a_2{+}a_1{+}a_0),$$

$$\text{следовательно,} \quad \overline{a_2 a_1 a_0} \;\vdots\; 3 \;\Leftrightarrow\; a_2{+}a_1{+}a_0 \;\vdots\; 3$$

*Замечание.* Обратите внимание на слова "тогда и только тогда" (коротко: "$\Leftrightarrow$"). Мы должны были доказать не только тот факт, что, если сумма цифр делится на 3, то $a$ делится на 3, но и то что, если $a$ делится на 3, то и сумма цифр делится на 3.

**Задача 4.** Выяснить, является ли число 227 составным.

*Решение.* Число 227 может быть произведением только нечетных чисел. Будем проверять нечетные числа в порядке возрастания. Заметим, что нам достаточно проверить делимость только на простые числа, так как, если число делится например на 15, то оно должно также делиться на 3, но раз нам пришлось дойти до 15, то мы уже проверили, что оно не делится на 3. Итак, 227 не делится

- на 3, так как сумма цифр $2{+}2{+}7{=}11$ не делится на 3;
- на 5, так как заканчивается цифрой 1;
- на 7 (можно проверить делением в столбик);
- на 11, так как $|2 + 7 - 2| = 7$ не делится на 11;
- на 13 (можно проверить делением в столбик).

Проверять делимость на 17 и далее нет смысла, так как мы выяснили, что 227 не делится на натуральные числа от 2 до 16. Если $227 = ab$, где $a$, $b$ — целые числа, большие 16, то их произведение больше $16^2 = 256$. Значит, 227 — простое число.

**Задача 5.** Найдите все трехзначные числа, превышающие сумму своих цифр в 15 раз.

*Решение.* Ищем все числа $n = 100a + 10b + c$, такие что

$$n = 100a + 10b + c = 15(a + b + c)$$

($a$, $b$, $c$ — цифры, $a \neq 0$).

Определим возможную величину числа. Максимальная сумма цифр $9 + 9 + 9 = 27$. Следовательно, $n = 15(a{+}b{+}c) \leq 15 \cdot 27 = 405$.

Отсюда следует, что максимальная сумма цифр трехзначного числа, не превышающего 405, равна $3{+}9{+}9 = 21$, то есть $n = 15(a{+}b{+}c) \leq 15 \cdot 21 = 315$.

Из условия следует, что $n \;\vdots\; 15$. Раз $n \;\vdots\; 3$, то сумма его цифр $a{+}b{+}c$ делится на 3. Таким образом, из равенства $n = 15(a + b + c)$ следует, что $n$ делится на 9. Но отсюда мы получаем, что $a + b + c$ делится на 9 (признак делимости на 9).

Раз $a{+}b{+}c \;\vdots\; 9$ и $n{=}15(a{+}b{+}c)$, то $n \;\vdots\; 135$.

Так как $n \leq 315$, то возможны только два варианта: $n = 135$ и $n = 2 \cdot 135 = 270$. Так как $135 = 15{\cdot}(1{+}3{+}5)$, $270 = 30{\cdot}(2{+}7{+}0)$, то подходит только 135.

*Ответ:* 135.