Геометрия. Точки, отрезки, полоски плоскости.

Основные понятия геометрии: точка, прямая, плоскость. Они являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка – идеализация маленьких объектов, таких, размерами которых можно пренебречь. В «Началах» Евклида точка – это то, что не имеет частей.

Прямая – тонкая натянутая нить, край стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость – ровная поверхность воды, поверхность стола и т.п.

А что получится, если от поверхности стола «отрезать» небольшую полоску и поэкспериментировать с ней?

Топологические опыты

Топология является одним из самых «молодых» разделов современной геометрии. Чтобы получить некоторое представление о топологии, рассмотрим несколько топологических опытов с поверхностями, полученными из бумажной полоски примерно 30 см в длину и 3 см в ширину (рис. 1). Для этого сразу заготовим несколько таких полосок из листа плотной бумаги.

Склейте два кольца: одно простое (рис. 2) и одно перекрученное (рис. 3). Перекрученное кольцо получите так, как показано на рисунке.

Рис. 1

Рис. 2

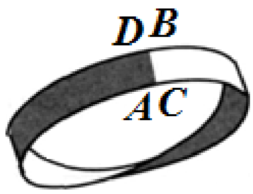


Рис. 3

Представьте муравья (а может быть точку), находящегося на поверхности простого кольца. Удастся ли муравью попасть на обратную, изнаночную сторону кольца, не переползая через край, а двигаясь только прямо? Конечно же нет! А если муравей ползет по перекрученному кольцу? Попробуйте провести непрерывную линию по одной из сторон перекрученного кольца, будем считать, что это путь муравья (а быть может точки). Что получится в этом случае?

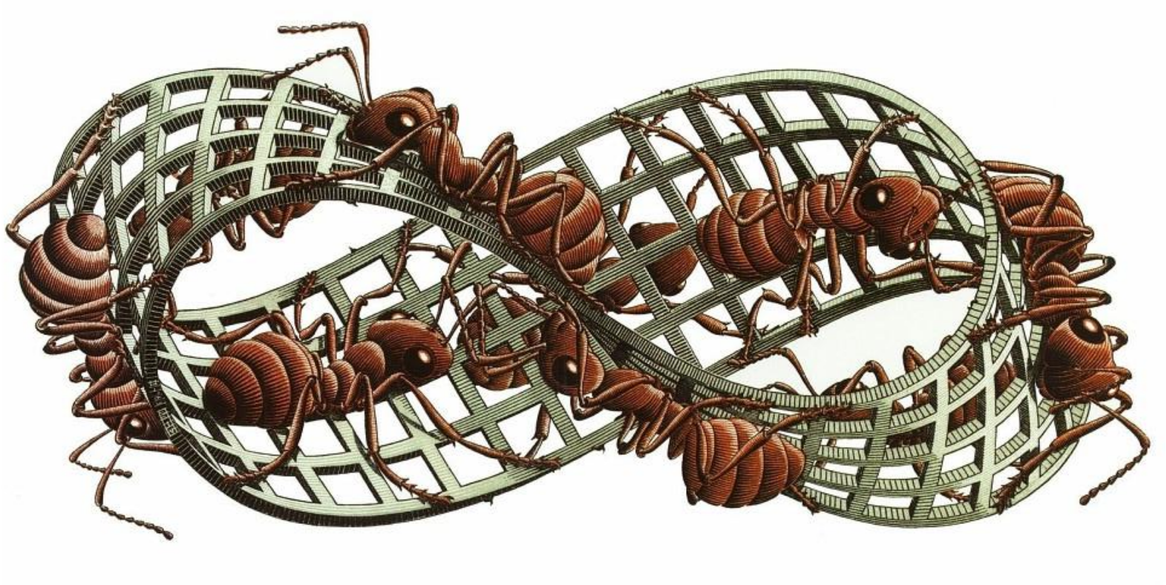
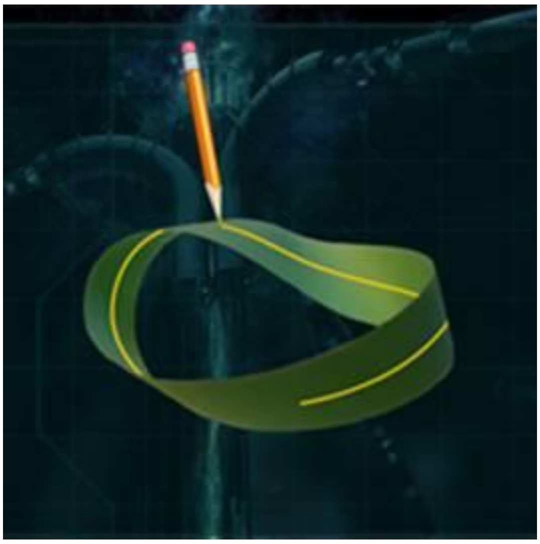


Рис. 4



Этот опыт провел в середине прошлого века немецкий астроном и геометр Август Мебиус (1790-1868). Он обнаружил, что на перекрученном кольце линия прошла по обеим сторонам, хотя его карандаш не отрывался от бумаги. Оказывается, у перекрученного кольца (впоследствии его назвали листом Мебиуса) имеется только одна сторона! (рис. 5)

Рис. 5

Позже математики открыли еще целый ряд односторонних поверхностей. Но эта, самая первая, положившая начало целому направлению в геометрии, по-прежнему привлекает к себе внимание не только ученых, но и художников (см. рис. 4 – М. Эшер, Красные муравьи).

Опыты, которые мы предлагаем вам провести с листом Мёбиуса и подобными ему кольцами, продемонстрируют много интересных и неожиданных свойств.

Рис. 6

Задача 1 (*Несколько перекручиваний***).** Разрежьте простое кольцо ножницами вдоль (рис. 6). Что получилось? Разрежьте перекрученное на пол-оборота кольцо (лист Мебиуса) вдоль.
Продолжайте перекручивание полоски бумаги перед склеиванием, каждый раз увеличивая число полуоборотов на один. Разрежьте вдоль.

Результаты запишите в таблицу:

Число полуоборотов	**Результат разрезания**	**Свойства**	**Рисунок**
0	2 кольца	длина окружности кольца та же, но кольцо в 2 раза уже	
1			
2			
3			
4			

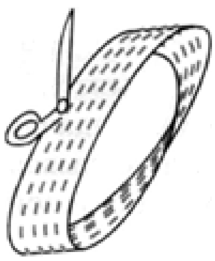


Рис. 7

Задача 2 (*Несколько разрезов***).** Склейте лист Мебиуса шириной 5 см. Что получится, если разрезать его вдоль, отступив от края сначала на 1 см, затем на 2 см, на 3 см, на 4 см (рис. 7)?

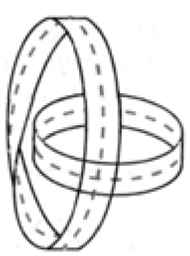
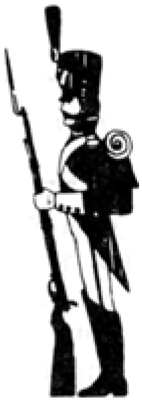


Рис. 8

Задача 3 (*Несколько лент*). Приготовьте два кольца: одно простое и одно перекрученное. Склейте их, как показано на рисунке 8, а затем оба разрежьте вдоль.



Задача 4 (*Солдатик-перевертыш*). Вырежьте из бумаги солдатика (рис. 9) и отправьте его вдоль пунктира, идущего по середине листа Мебиуса. В каком виде солдатик вернется к месту старта?

Рис. 9

Лист Мебиуса — один из объектов топологии. Интересно, что с точки зрения топологии гайка, макаронина и кружка — одинаковые объекты. Их роднит то, что каждый из них имеет одно и только одно отверстие. Если бы мы из пластилиновой гайки, не разрывая и не склеивая пластилин, захотели вылепить макаронину или кружку, то нам бы это удалось. А вот кастрюльку с двумя ручками уже не вылепить (в ней две дырки-ручки). Придумайте еще несколько предметов, одинаковых с гайкой с точки зрения топологии. Перечислите несколько «топологических родственников» шара.

Среди букв русского алфавита тоже есть топологически одинаковые буквы. Представьте, что они сделаны из мягкой проволоки.

Задача 5. Какие из букв можно преобразовать одну в другую, если не разрывать проволоку в местах соединений и не склеивать концы? Проволоку можно только гнуть и растягивать! Перечислите все такие буквы.

Если продолжать рассуждения дальше, то очень хочется упомянуть здесь еще один удивительный объект, не существующий рядом с нами, в евклидовом трехмерном пространстве, но описанный математически.

Раз моряки, погожим днем пустились по морю втроем.
Но не в тазу - была у них бутылка Клейна на троих.
Три моряка в бутылку сели, в ней не страшны ни шторм, ни мели.
Но оказалось им на горе и судно в море, и в судне море.
Фредерик Уинзор

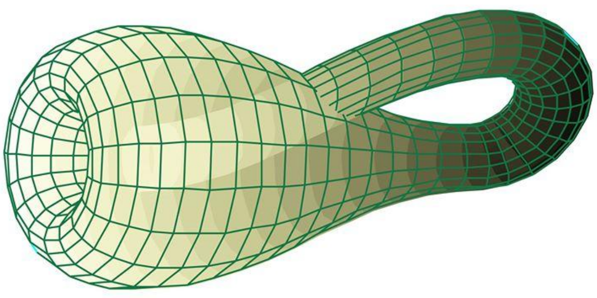


Рис. 10

***Бутылка Кляйна** –неориентируемая (односторонняя) поверхность, впервые описанная в 1882 году немецким математиком Феликсом Кляйном. Она тесно связана с лентой Мебиуса. Название, видимо, происходит от неправильного перевода немецкого слова *Fläche*(поверхность), которое в немецком языке близко по написанию к слову *Flasche*(бутылка); затем это название вернулось в таком виде в немецкий.

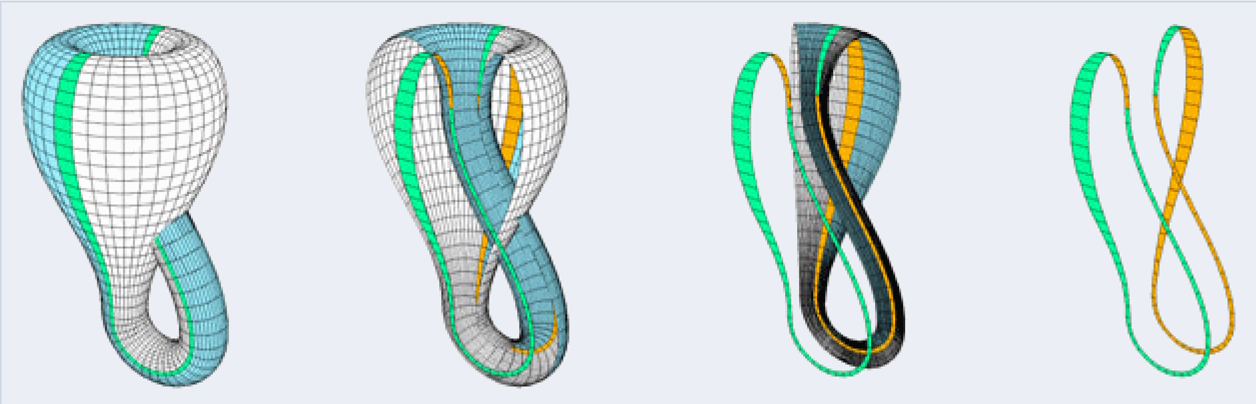
Чтобы построить модель бутылки Клейна, понадобится бутылка с двумя дополнительными отверстиями: в донышке и в стенке. Горлышко бутылки нужно вытянуть, изогнуть вниз и, продев его через отверстие в стенке, присоединить к отверстию на дне бутылки. Для настоящей бутылки Кляйна в четырехмерном пространстве отверстие в стенке не нужно, но без него нельзя обойтись в трехмерном евклидовом пространстве.

В отличие от обыкновенного стакана, у этого объекта нет «края», где бы поверхность резко заканчивалась. В отличие от воздушного шара, можно пройти путь изнутри наружу, не пересекая поверхность (то есть на самом деле у этого объекта нет «внутри» и нет «снаружи»).

Свойства

Если рассечь бутылку Кляйна на две половинки вдоль плоскости симметрии, то получатся две зеркальных ленты Мебиуса, одна – с разворотом вполоборота вправо, другая – с разворотом вполоборота влево. Фактически, возможно рассечь бутылку Кляйна так, что получится одна лента Мебиуса.

Иначе, бутылка Кляйна может быть представлена в виде двух лент Мебиуса, соединенных друг с другом обычной двухсторонней лентой. На рисунке ниже внутренняя поверхность этой ленты окрашена белым цветом, а внешняя – голубым.



Для многих деятелей культуры (в первую очередь писателей-фантастов) оказался притягательным сам термин «бутылка Клейна». Применение его в качестве атрибута, а порой и главного действующего «лица», стало признаком «интеллектуальной» фантастики. Таков, например, рассказ «Последний иллюзионист», принадлежащий перу Брюса Элиота. По сюжету ассистент фокусника расправляется со своим патроном, который делал трюки с четырехмерной бутылкой Клейна. Забравшийся в бутылку иллюзионист так и остается наполовину погруженным в нее. По мнению автора, эту бутылку нельзя разбить, не повредив содержимого. Так ли это на самом деле – сказать не может никто. По крайней мере, математики, которые, возможно, могли бы ответить на этот вопрос, им не озадачивались, для науки это неактуально.