Олимпиада СУНЦ

7 класс

1. Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка–2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой кулинарную книгу «Красная Шапочка–2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросёнку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

   Решение:
   За книгу «Три поросёнка-2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается $1/3$ остатка. За книгу «Красная шапочка-2» ему также полагается $1/3$ гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы.

   Ответ: 700 золотых монет

2. Сколько различных решений имеет ребус (разными буквами обозначаются разные цифры, а одинаковыми буквами – одинаковые цифры)?

$$ODD + ODD = EVEN$$

   Решение:
   Так как при суммировании двух трехзначных чисел получается четырехзначное, то первая цифра четырехзначного — 1. Получается:

$$ODD + ODD = 1V1N.$$

   При этом в разряде единиц и десятков мы суммируем одинаковые цифры, а получаем разные. То есть из разряда единиц есть переход в разряд десятков. Таким образом $D = 5, 6, 7, 8, 9$. Из всех этим вариантов подходит только 5:

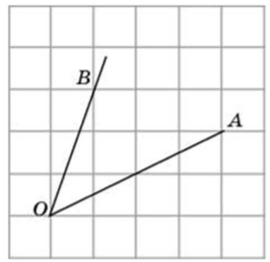
$$O55 + O55 = 1V10$$

   Осталось лишь вспомнить, что разряд сотен тоже дает переход, то есть $O = 6, 7, 8, 9$. Из этих четырех вариантов нам подходят только два: $655+655 = 1310$ и $855 + 855 = 1710$
   Ответ: 2.

3. В диване живут клопы и блохи. Если число клопов увеличится в N раз (N — натуральное число), то всего насекомых станет 1001, а если в N раз увеличится число блох (а популяция клопов не изменится), то всего насекомых будет 1000. Сколько насекомых в диване сейчас?

   Решение:
   Пусть в диване K клопов и B блох. Тогда по условиям задачи мы имеем два равенства: $KN + B = 1001$ и $K + NB = 1000$. Вычтем из первого равенства второе и мы обнаружим, что $K(N-1)+B(1-N) = 1$. Или $(N-1)(K-B) = 1$. Так как первый множитель положителен, то мы получаем, что $N - 1 = 1$ и $K - B = 1$. Отсюда мы заключаем, что $N = 2$ и $K = B + 1$. Подставляем это во второе равенство и получаем: $B + 1 + 2B = 1000$. Откуда находим, что $B = 333$, $K = B + 1 = 334$, а всего в диване $333 + 334 = 667$ насекомых.
   Ответ: 667.

4. Найдите угол BOA (ответ дайте в градусах).



   Решение:
   Несложно заметить, что $BO = BA$ и $\angle OBA = 90°$. А тогда искомый $\angle BOA = 45°$

   Ответ: 45 градусов.

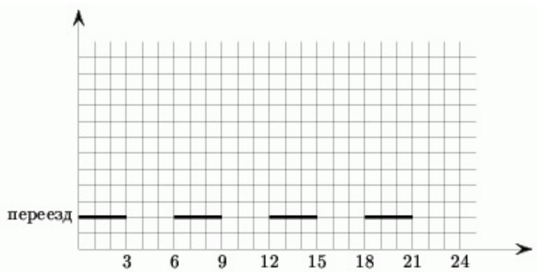
5. «Однобокая» ладья — это фигура, которая ходит и бьет как обычная ладья, но либо только по горизонтали, либо только по вертикали. Какое наибольшее число не бьющих друг друга однобоких ладей можно расставить на шахматной доске 8×8?

   Решение:
   Будем называть ладью «горизонтальной», если она бьет по горизонтали. Заметим, что горизонтальные ладьи могут стоять только в разных строчках. Если на доске есть восемь горизонтальных ладей, то они стоят во всех строках, и, следовательно, бьют все остальные клетки доски. Таким образом, в этом случае ладей не больше 8. В противном случае горизонтальных ладей не больше семи. Аналогично, вертикальных ладей не больше семи, поэтому всего на доске не больше 14-ти ладей. Ровно 14 ладей на доске можно расставить: для этого надо расставить семь ладей в первом столбце (во всех клетках, кроме верхней), и объявить их горизонтальными, а во всех клетках верхней строки (кроме левой) расставить еще семь ладей и объявить их вертикальными.
   Ответ: 14.

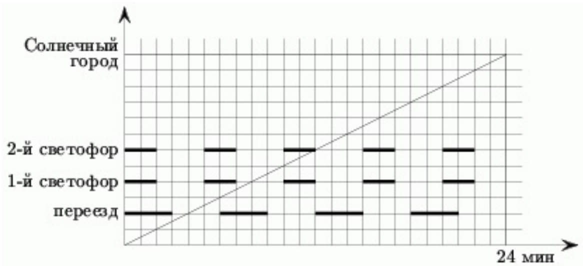
6. Из Цветочного города в Солнечный ведет шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты - зеленым и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в

Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)?

Решение:
Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат — расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость электромобиля постоянна, то график его движения — прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекут три минуты, а также на седьмой, восьмой и девятой минутах, на тринадцатой-пятнадцатой минутах и т. д. Графически это означает, что прямая не может пересекать выделенные отрезки.



Аналогично можно отметить отрезки, которые запрещено пересекать из-за светофоров.



Осталось из начала координат провести прямую, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков и пересекает горизонтальную прямую $y = 12$ как можно раньше.

Ответ: 24 мин.

Олимпиада СУНЦ

8 класс

1. По кругу сидят 2016 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый человек сказал: «Про меня и двух моих соседей ничего не скажу, а вот все остальные — точно лжецы». Сколько рыцарей может быть за этим столом?

   Решение:
   Заметим сперва, что все лжецами быть не могут — тогда получится, что все говорят правду. Теперь заметим, что не может быть за этим столом и ровно один рыцарь: ведь тогда правду говорит его сосед, а он по предположению — лжец. Наконец заметим, что рыцарей не может быть три или больше: ведь тогда найдутся два рыцаря, которые не сидят рядом, и получится, что они оба лгут.
   Если за этим столом ровно два рыцаря, которые при этом сидят рядом, то все условия задачи оказываются выполненными.
   Ответ: 2.

2. Какой наибольший остаток может получиться, если поделить двузначное число на сумму его цифр?

   Решение:
   Посмотрим, какой может быть сумма цифр двузначного числа: 1,2,. . .,18. Переберем, какие остатки может давать число при делении на сумму цифр, начиная с большего:
   с суммой цифр 18 существует единственное число - 99, при делении на 18 получаем остаток 9;
   с суммой цифр 17 существует два числа: 89 (остаток при делении на 17 равен 4) и 98 (остаток при делении на 17 равен 13);
   с суммой цифр 16 существует три числа: 79 (остаток при делении на 16 равен 15), 97 (остаток при делении на 16 равен 1) и 88 (остаток при делении на 16 равен 8).
   У чисел с меньшей суммой цифр не может получиться остаток больше, чем 15, так как остаток всегда меньше делителя.
   Ответ: 15.

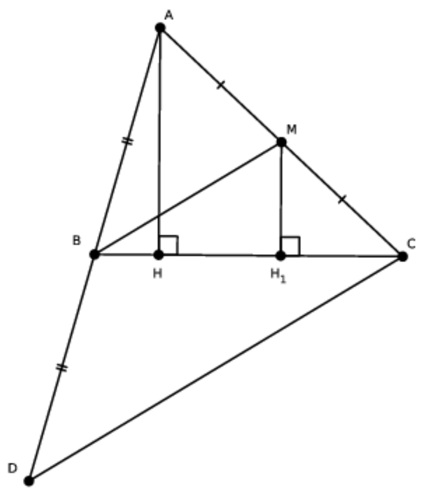
3. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых подряд выписанных 200 цифр нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд — не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду?

   Решение:
   Сперва заметим, что расставив 100 нулей, потом 100 единиц и снова 100 нулей, мы получим пример, состоящий из 300 цифр. Пусть удалось расставить больше цифр с этими условиями. Пусть 201-ая цифра ноль. Рассмотрим остальные цифры после 201-ой. Заметим, что они все нули. Действительно, пусть среди этих цифр есть единица. Рассмотрим первую из этих цифр. Перед ней стоит ноль (так как 201-ая цифра ноль). Тогда среди 202-х последовательных цифр,

оканчивающихся найденной единицей, нулей и единиц поровну. Действительно, среди первых двухсот цифр нулей и единиц поровну, а последние две — это 0 и 1. Значит, единиц среди цифр начиная с 201-й нету, то есть все они нули. Нулей не может быть больше 100 (так как иначе бы среди последних двухсот цифр нулей было бы больше 100, то есть больше, чем единиц). Значит цифр не больше 300, а в нашем примере их ровно 300.
Ответ: 300.

4. Высота AH остроугольного треугольника ABC равна его медиане BM. На продолжении стороны AB за точку B отложена точка D так, что $BD = AB$. Найдите угол BCD.

Решение:



Опустим высоту MH_1 в треугольнике BMC. Она, очевидно, будет средней линией для треугольника AHC, а тогда $MH_1 = \frac{1}{2}AH = BM$.
Теперь если мы рассмотрим треугольник BMH_1, то заметим, что он прямоугольный и в нем медиана равна половине гипотенузы. Тогда $\angle MBC = 30^{circ}$.
Ну и осталось заметить, что BM средняя линия треугольника ADC, а тогда $\angle BCD = \angle MBC$ как накрест лежащие.

5. В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовало 12 человек, каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии даётся 1 очко, за ничью — 0.5 очка, за поражение — 0 очков. По итогам турнира звание мастера спорта присваивали, если участник набрал более 70% от теоретически возможного числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Какое наибольшее число участников могли получить звание мастера спорта?

Решение:
В результате выигрыша всех партий можно получить 11 очков. Чтобы получить звание мастера спорта, надо получить не менее 70% от этого количества, т.е. не менее 7,7 очков. Количество очков может быть только целым или полуцелым, поэтому для получения звания мастера спорта надо набрать не менее 8 очков.
Пусть это удалось n участникам. Тогда в сумме они набрали не менее $8n$ очков. При этом в партиях между собой они разыграли $n(n-1)/2$ очков (каждый сыграл с каждым); кроме того, каждый из них набрал не более $12 - n$ очков в партиях против игроков не получивших звания мастера спорта. Получаем неравенство

$$\frac{n(n-1)}{2} + n(12-n) \leq 8n.$$

Деля на n, получаем:

$$\frac{n-1}{2} + 12 - n \leq 8.$$

Отсюда $\frac{n+1}{2} \leq 4$, то есть $n \leq 7$.
Докажем, что 7 участников действительно могло стать мастерами спорта. Предположим, что семь участников сыграли между собой вничью, набрав в каждой из шести партий по пол-очка, и обыграли каждого из остальных пятерых участников. Тогда получается, что каждый из этих семерых шахматистов заработал по 8 очков.
Ответ: 7.

6. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге?

Решение:
Пусть x — число людей, вышедших на митинг. Рассмотрим общее число «недовольств». С одной стороны, каждой реформой недовольно ровно 48 жителей, а значит, общее число недовольств равно $48 \times 5 = 240$. С другой стороны, каждый вышедший на митинг недоволен хотя бы тремя реформами. Следовательно, общее число недовольств не меньше, чем $3x$. Таким образом, $240 > 3x$, откуда $x < 80$. Итак, искомое число не больше 80. Приведём пример, когда на площадь выйдет ровно 80 человек. Выберем среди жителей острова 80 человек и разобьём их на пять групп по 16 человек. Пусть против первой реформы возражают люди из первых трёх групп, против второй — люди из второй, третьей и четвёртой групп, против третьей — люди из третьей, четвёртой и пятой групп, против четвёртой — люди из четвёртой, пятой и первой групп, а против пятой — люди из пятой, первой и второй групп. Тогда против каждой реформы возражают ровно $3 \times 16 = 48$ человек, и на митинг выйдут выбранные 80 человек.

Ответ: 80 человек.