Олимпиада СУНЦ

7 класс

1. Известно, что $\frac{a+b}{a-b}=3$. Чему может быть равно выражение $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$?

   Решение:
   Преобразуем данное равенство
   $$a+b=3(a-b); 4b=2a; 2b=a.$$
   Подставим его в выражение, которое нас интересует
   $$\frac{4b^2+b^2}{4b^2-b^2}=\frac{5b^2}{3b^2}=\frac{5}{3}.$$
   Ответ: $\frac{5}{3}$.

2. По кругу расставлено 19 нулей, единиц и двоек, причем не все написанные числа равны. За один ход между двумя одинаковыми соседними числами записывается такое же число, а между двумя различными числами пишется число, отличное от обоих. После чего старые числа стираются. Может ли через некоторое время на доске быть написано 19 равных чисел?

   Решение:
   Предположим, что такое могло произойти. Давайте рассмотрим первый момент времени, когда все числа стали равны. Что было на предыдущем ходу? Для удобства дальнейших рассуждений занумеруем числа по кругу с первого по 19-е. И будем считать, что когда мы совершаем ход — новое число, появившееся между первым и вторым будет стоять на первом месте, между вторым и третьи — на втором, и тд... Между 19-м и 1-м — на девятнадцатом.
   Итак, все числа стали равны. Пусть все они равны x. А два других вида чисел - это y и z.
   Сейчас на первом месте стоит число x. Тогда возможны два вариант:

   1. На предыдущем шаге на 1-м и 2-м местах также стояли x.
   2. На предыдущем шаге на 1-м и 2-м местах также стояли y и z.

   Разберем оба эти вариант.
   Вариант 1. Тогда не сложно понять, что поскольку сейчас на втором месте стоит x, и на предыдущем шаге на втором месте стоял x, то и на третьем месте на предыдущем шаге стоял x. Аналогичными рассуждениями получаем, что на предыдущем шаге весь круг состоял из x. Но мы рассматриваем первый момент, когда все числа в кругу стали равны. Противоречие.
   Вариант 2. Без нарушения общности можем считать, что на предыдущем шаге на первом месте стояло y, а на втором z. Но тогда поскольку на текущем ходу на втором месте стоит x, то на предыдущем на третьем месте стоял y. Продолжая аналогичными рассуждениями заполнять числа на предыдущем шаге мы получим, что y и z там чередовались. А тогда на 1-м месте стоял z. То есть на первом месте одновременно должны были стоять и y, и z. Противоречие.

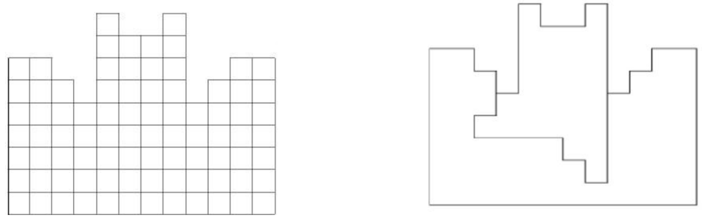
   Таким образом мы получили, что оба варианта невозможны. А это означает, что все числа равными получиться не могли.

3. Пусть N — наименьшее натуральное число, которое дает различные остатки при делении на $1, 2, 3, 4, \dots, 2016$. Какой остаток это число дает от деления на 2016?

   Решение:
   Остаток числа N при деление на 1 равен 0. Остаток при деление на 2 равен либо 0, либо 1, но 0 уже «занято», поэтому остаток равен 1. Остаток при делении на 3 равен либо 0, либо 1, либо 2, но 0 и 1 уже «заняты», поэтому остаток равен 2. И так далее.

   Ответ: 2015.

4. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник.



5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Кроме этого
   $$\angle BAC : \angle ADC : \angle BCA = 3:2:1.$$
   Докажите, что $AB + AD = BC$.

   Решение:
   Пусть $\angle BCA = \alpha$, тогда $\angle ADC = 2\alpha$, $\angle BAC = 3\alpha$. Пусть точка E — точка симметричная D относительно прямой AC. Получается $\angle EAC = \angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD = 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha = 180^\circ - \angle BAC$.
   Из этого следует, что точки B, A и E лежат на одной прямой. Тогда $BA + AD = BA + AE = BE$. Таким образом, интересующий нас факт следует из равнобедренности треугольника EBC. Что следует из построения точки E: $\angle BCE = \angle BCA + \angle ACE = \alpha + \alpha = 2\alpha = \angle ADC = \angle AEC$.

Олимпиада СУНЦ

8 класс

1. Пусть a, b, c — нечетные натуральные числа. Может ли число $a^b b^c c^a$ быть точным квадратом? (напоминаем, что число x называется точным квадратом, если существует такое натуральное n, что $x = n^2$)

   Решение:
   Достаточно взять три полных квадрата. Например, $a = 1, b = 9, c = 25$.

2. В однокруговом шахматном турнире участвовало 23 школьника. В некоторый момент оказалось, что среди любых четырех из них имеется хотя бы один человек, который успел сыграть с тремя другими. Докажите, что до конца турнира осталось не более трех партий.

   Решение:
   Пусть турнир еще не закончился. Тогда рассмотрим двух игроков A и B пока не сыгравших друг с другом. Заметим, что не существует еще двух игроков C и D не сыгравших друг с другом, т.к. иначе рассмотрим четверку A, B, C, D и она противоречит условию. Тогда все несыгранные партии были с участием либо A, либо B. При этом если один из них не сыграл пока три или более партии, то также не выполнено условие задачи. Действительно, пусть A не сыграл с B, C и D. Тогда четверка A, B, C, D вновь противоречит условию. Значит у каждого из A и B не более двух несыгранных партий, одна из которых друг с другом. Но если A и B пока не сыграли по две партии, и вторую партию с разными людьми, (скажем, A не сыграл с C, а B не сыграл с D), то и здесь четверка A, B, C, D противоречит условию. Все варианты, когда не сыграно более трех партий невозможны.

3. Про положительные числа x, y $(x > y)$ известно, что $2(x + y) \geq 5\sqrt{xy}$. Докажите, что $x \geq 4y$.

   Решение:
   Поскольку обе части положительны, то мы можем возвести неравенство в квадрат. Тогда получим

   $4(x + y)^2 \geq 25xy$

   $4x^2 + 8xy + 4y^2 \geq 25xy$

   $4x^2 - 17xy + 4y^2 \geq 0$

   $4x^2 - 16xy - xy + 4y^2 \geq 0$

   $4x(x - 4y) - y(x - 4y) \geq 0$

   $(4x - y)(x - 4y) \geq 0$

   Но поскольку $x \geq y$, то $4x - y \geq 0$. А тогда $x - 4y \geq 0$. Что и требовалось доказать.

4. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка X, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Y, причем $AX = XY$. Докажите, что $BX = CY$.

   Решение:
   Отметим на стороне AB точку X' такую, что $XX' \| AC$. Заметим, что $AX'XC$ — равнобочная трапеция, поэтому $AX = CX'$ и $\angle XAC = \angle X'CA$ (впрочем, указанные равенства легко следуют из того, что точки X и X' симметричны относительно высоты треугольника ABC, проведенной из вершины B, как и точки A и C). Но мы знаем, что $AX = XY$, и потому $\angle MAC = \angle XYC$. Отсюда мы заключаем, что $XY = CX'$ и $\angle XYC = \angle X'CA$, то есть $XY \| X'C$. Значит, четырехугольник $X'XYC$ — параллелограмм (его стороны XY и $X'C$ равны и параллельны) и поэтому $CY = XX'$. Осталось заметить, что треугольник BXX' равносторонний (все его углы равны $60°$) и поэтому $XX' = BX$. Последнее равенство и заканчивает доказательство.

5. Пусть N — наименьшее натуральное число, которое дает различные остатки при делении на 2, 4, …, 2016. Какой остаток это число дает при делении на 2016?

   Решение:
   Рассмотрим два случая:
   1) N — нечетное. Тогда остаток N при деление на 2 равен 1. Остаток при деление на 4 равен либо 1, либо 3, но 1 уже «занято», поэтому остаток равен 3. Остаток при деление на 6 равен либо 1, либо 3, либо 5, но 1 и 3 уже «заняты», поэтому остаток равен 5. И так далее. Получается $N + 1$ делится на $2, 4, 6, \ldots, 2016$. То есть минимальное значение
   $N = \text{НОК}(2, 4, 6, \ldots, 2016) - 1$.
   2) N — чётное. Тогда из аналогичных соображений N дает остаток 0 при деление на 2, остаток 2 при деление на 4, остаток 4 при деление на 6 и т.д. Таким образом $N + 2$ делится на $2, 4, 6, \ldots, 2016$. То есть минимальное значение
   $N = \text{НОК}(2, 4, 6, \ldots, 2016) - 2$.
   По условию задачи N —минимально, тогда N — чётно и дает остаток 2014 при деление на 2016.

   Комментарий: если разобран только один случай, то ставилось не более 2 баллов; если разобраны оба случая, но не сделан вывод (или вывод сделан неправильно), то ставилось не более 5 баллов.