Олимпиада СУНЦ

Третий тур. 9 класс.

1. Найдите все тройки ненулевых чисел a, b, c, образующих арифметическую прогрессию, и таких, что из чисел $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ также можно составить арифметическую прогрессию.

   Решение:
   1 вариант. Все числа одного знака. Без нарушения общности можно считать, что в $a \geq b \geq c$. Тогда $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$. Из условия следует, что $a-b=b-c$ и $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$. Из этого легко следует, что либо $a=b=c$, либо $ab=bc$, что также в условиях $a \geq b \geq c$ достигается только когда $a=b=c$.
   2 вариант. Два числа одного знака и одно другого. Если отрицательных два, то домножим все числа на -1. От этого условие про арифметическую прогрессию не изменится. Опять же без нарушения общности можно считать, что $a \geq b$ — положительные, а c — отрицательно. Тогда мы из условия имеем, что $a-b=b-c$ и $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}$. Из этого, используя что $a-c=2(a-b)$ получаем, что $c=-2b$, а тогда $a=4b$.
   Итого, условию удовлетворяют два набора троек $\{a,a,a\}$ и $\{4b,b,-2b\}$, где числа внутри троек можно переставлять в произвольном порядке, и a и b могут принимать любые ненулевые значения.

   Комментарий: если для последовательности обратных рассматривался только порядок, совпадающий с прямыми, - 0 баллов.

2. На стороне BC равнобедренного $\triangle ABC$ ($AB = BC$) взяли точки N и M (N ближе к B, чем M), такие, что $NM = AM$, $\angle BAN = \angle MAC$. Найдите угол $\angle NAC$.

   Решение: пусть $\angle BAN = \angle MAC = \alpha$. Из равенства $NM = AM$ следует, что $\angle NAM = \angle ANM = \beta$. Тогда

$$180^\circ = \angle NAC + \angle ANC + \angle BCA = (\alpha+\beta)+\beta+\angle BAC =$$

$$= (\alpha+\beta)+\beta+(2\alpha+\beta) = 3(\alpha+\beta) = 3\angle NAC.$$

   Поэтому $\angle NAC = 60^\circ$.

3. За круглым столом собралось 35 жадных рыцарей. 25 из них считали, что заслужили медаль за отвагу, а 10 считали, что заслужили две медали. Но король выдал каждому рыцарю только по одной. Уходя, каждый мог забрать, как свою медаль, так и медали своих соседей по столу (соседями считаются те, кто первоначально сидел рядом). Если рыцарь в итоге получал столько медалей, сколько он и хотел, то он уходил довольным. Какое наибольшее количество рыцарей могли уйти довольными?

   Решение: предположим, что довольным ушел хотя бы 31 рыцарь. Тогда не менее 6 человек унесли с собой по 2 медали, а остальные не менее одной. То есть всего было унесено не менее 37 медалей, чего не могло быть.

   Осталось показать, что 30 рыцарей могли уйти довольными. Давайте занумеруем рыцарей с 1 по 35 по кругу. Пусть с 11 по 35 хотели и унесли с собой по 1 медали, рыцари с номерами $1, 3, 5, 7, 9$ хотели и унесли по две медали (свою и со следующим) номером, а $2, 4, 6, 8, 10$ остались недовольны.

4. Для попарно различных действительных чисел a, b, c выполнено

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = t.$$

   Докажите, что $abc + t = 0$.

   Решение: в выражение $abc+t$ подставим $t = a + \frac{1}{b}$. Получается

$$abc + t = abc + a + \frac{1}{b} = ac(b + \frac{1}{c}) + \frac{1}{b} = act + \frac{1}{b} = \frac{abct+1}{b}.$$

   Аналогично получаются два оставшихся выражения

$$abc + t = \frac{abct+1}{b} = \frac{abct+1}{c} = \frac{abct+1}{a}.$$

   Но $a \neq b \neq c \neq a$, поэтому равенство будет достигаться только если $abct + 1 = 0$. Поэтому $abc + t = 0$

5. Среди 15 монет 8 монет фальшивые и 7 — настоящие. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

   Решение: да, можно. Первым взвешиванием мы кладем по четыре монеты на каждую чашу весов.
   1) В случае неравенства на тяжелой чаше весов есть хотя бы одна настоящая монета. Тогда раскладываем эти монеты по две на каждую чашу весов. Если какая-то чаша весов перевесит, то на ней точно есть настоящая монета и за одно взвешивание мы сможем ее найти (взвесив монеты с этой чаши, в случае равенства обе монеты будут настоящими). Если же будет равенство, то на обеих чашах есть настоящие монеты, тогда сравним монеты с любой из чаш и найдем настоящую.
   2) Если в первом взвешивании мы получили равенство, то среди этих 8 монет находится четное количество настоящих. Таким образом среди оставшихся 7 монет точно есть хотя бы одна настоящая. Тогда откинем первые 8 монет и будем работать только с оставшимися. Возьмем 4 из них положим по две монеты на каждую чашу весов. В случае неравенства на тяжелой чаше есть настоящая монета, ее можно будет определить за одно взвешивание. Если же весы вторым взвешиванием показали равенство, то среди оставшихся 3 монет есть хотя бы одна настоящая (на самом деле там их нечетное количество, то есть либо одна, либо три). Взвесим две из низ третьим взвешиванием, и в случае равенства третья монета — настоящая, а в случае неравенства более тяжелая монета — настоящая.

Олимпиада СУНЦ

Третий тур. 10 класс.

1. При каких натуральных a множество действительных корней уравнения

$$x^4 + 2x^3 - 97x^2 = ax^2 + bx + c$$

в точности совпадает с множеством чисел $\{-10; 10\}$?

Решение: поскольку 10 и -10 являются корнями нашего уравнения, то мы имеем $10^4+2\cdot 10^3-97\cdot 10^2 = 10^2a+10b+c$ и $10^4-2\cdot 10^3-97\cdot 10^2 = 10^2a-10b+c$. Отсюда легко получить, что $b = 200$ и $c = -100(a-3)$. А тогда наше уравнение переписывается в виде $(x^2-100)(x^2+2x-(a-3)) = 0$.
Тогда уравнение $x^2+2x-(a-3) = 0$ либо не имеет корней, либо его корни лежат во множестве $\{-10; 10\}$. Если корней нет, то из отрицательности дискриминанта получаем, что $a < 2$. Корни $\{-10; 10\}$ быть не могут, поскольку по теореме Виета сумма корней у нашего уравнения должны быть равны -2. Получается a=1.

2. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка K. Прямая AK пересекается продолжение стороны CD в точке L, на луче AB за точкой B выбрана точка M, такая, что $CM \perp LK$, прямая MK пересекает сторону CD в точке N. Докажите, что описанная окружность $\triangle ANL$ касается прямой AD.

Решение: пусть O — точка пересечения MC и KL. Тогда

$$\angle BAK = 90^\circ - \angle BKA = 90^\circ - \angle OKA = \angle OCK.$$

Получается прямоугольники ABK и CMD равны по катету и острому углу. Тогда из равенства $MB = BK$ следует, что

$$\angle CKN = \angle MKB = \angle BMK = 45^\circ.$$

Таким образом $BK = BC - KC = CD - CN = ND$ ($KC = CN$, так как KCN — прямоугольный равнобедренный треугольник). Тогда прямоугольные треугольники ABK и AND равны по двум катетам. Из чего следует $\angle ALN = \angle BAK = \angle NAD$, равносильно факту, который необходимо доказать.

3. У Васи есть три вида доминошек: на одной половине 1 точка, другой 2; на одной 3 точки, на другой 4; и на одной половине 5 точек, а на другой 6. Он сложил из них прямоугольник $5\times n$ (размер доминошки: 1×2) таким образом, что количество точек в каждой строке и в каждом столбце чётно. При каких n это возможно?

Решение: поскольку в каждой строке четное число точек, то «половинок» с нечетным числом точек - четное количество. А значит и всего доминошек четное количество. То есть общее количество занимаемых ими «половинок» делится на 4. Поскольку всего половинок $5n$, то n должно быть кратно 4.
Осталось показать, что любой прямоугольник $5\times n$, где n делится на 4 можно получить. Понятно, что если мы сумеем сложить прямоугольник 5×4, то прикладывая их друг к другу мы получим любой прямоугольник размера $5\times 4k$. Ну а прямоугольник 5×4 сложить совсем не сложно. Это Вам предлагается проделать самостоятельно.

4. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r), таких, что p^q+p^r точный квадрат.

Решение: пусть $q > r$, тогда $p^q + p^r = p^r(p^{q-r}+1) = x^2$. Так как p^r и $(p^{q-r}+1)$ взаимно просты, то $r = 2$.
Тогда $(p^{q-2}+1)$ является точным квадратом. Представим это число в виде $p^{q-2}+1 = y^2$, получается $p^{q-2} = (y-1)(y+1)$.
Если $y-1 = 1$, то $(p, q) = (3, 3)$.
Иначе $y-1 = p^a$ и $y+1 = p^b$, из чего следует, что $p^b - p^a = 2$ и $a+b = q-2$. Получаем $p = 2, a = 1$ и $b = 2$. Из уравнения $q-2 = a+b$ находим $q = 5$. Таким образом существует решение $(p, q, r) = (2, 5, 2)$.
Если же $r = q$, то $p^q + p^r = 2p^r = x^2$, получается $p = 2$, а $r = q$ — любое нечетное простое число.
Получаем ответ $(p, q, r) \in \{(2,5,2), (2,2,5), (3,2,3), (3,3,2), (2,k,k)\}$, где k — любое нечетное простое число.

5. Футбольный клуб «Амкар» состоит из 48 игроков. В течение 3 месяцев тренировок каждый игрок сфолил на другом игроке, причем на каждом игроке сфолили ровно один раз. Кроме этого, для любых трёх футболистов можно указать четвертого, сфолившего на одном из них. Докажите, что тренер может выгнать из клуба не более 8 игроков, а остальных разбить пополам на основной состав и дублирующий, чтобы ни один футболист не попал в одну команду со своим обидчиком.

Решение: рассмотрим ориентированный граф, где вершины — футболисты, а фол одного футболиста на другом — это ориентированное ребро. Тогда весь граф распадается на несколько циклов. Причем из условия, что для любых трёх футболистов можно указать четвертого, сфолившего на одном из них, следует, что в каждом цикле хотя бы 4 ребра.
Если в цикле чётное число ребер, то его вершины можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке. Тогда все черные вершины мы отправим в основной состав, а все белые в дубль.
Если же в цикле нечетное количество ребер, то их хотя бы 5. Причем нечетных циклов обязательно чётное число (так как общее количество вершин чётно). Получается нечетных циклов не более 8, иначе их хотя бы 10, а это уже не менее 50 вершин. Таким образом мы можем выкинуть по одной вершине из каждого такого цикла и оставшиеся вершины раскрасить в два цвета в шахматном порядке. И черные вершины отправить в основной состав, а белые в дубль.