МП: Итерации Ньютона

Последовательность вида

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1, \dots .$$

используют для приближенного решения уравнения $f(x) = 0$, и называют *итерационной последовательностью Ньютона*. В таком виде метод Ньютона изложен Л. Эйлером в «Основаниях дифференциального исчисления» в 1755 году, где он назван *методом касательных Ньютона.*

Задание

1. Познакомиться с теоретическим материалом (см. ниже и файл ВВВ) и уметь доказывать неравенство о скорости сходимости итерационной последовательности Ньютона для приближенного вычисления числа вида

$$\sqrt{a}, \qquad a > 0.$$

2. Вычислить с точностью до 10^{-8} приближенное значение:

А) числа

$$\sqrt[K+2]{17} - \sqrt[K+3]{17};$$

Б) корня уравнения

$$x^3 - 3x + 2 + K = 0.$$

Варианты: Каждый учащийся выполняет свой вариант *K*, где *K* — номер, под которым стоит фамилия ученика в классном журнале.

Вычисления оформить в виде таблицы.

Теоретический материал

Что делать если хочется решать уравнение вида

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

где f некоторая непрерывная (и достаточное число раз дифференцируемая) в своей области определения функция, а точного (аналитического) метода не существует?

Прибегают к **численному** методу, позволяющему найти корни уравнения $f(x) = 0$ с любой заданной степенью точности. При этом нужно:

1) локализовать корень x^*, т.е. отделить его от остальных корней — «поймать» его в некоторый интервал (α, β), где других корней нет;

2) удачно выбрать начальное приближение $x_0 \in (\alpha, \beta)$ к корню x^*;

3) придумать формулу, по которой будут вычисляться последующие приближения x_1 x_2, и т.д. Каждый такой шаг называется *итерацией* (от латинского *iteratio* —повторение. При этом нужно быть уверенным, что итерационный процесс *сходится*, то есть

$$\lim_{k\to\infty} x_k \quad = x^*.$$

Сходимость итерационного процесса означает, в том числе, что погрешность $|x^* - x_n|$, каждого последующего приближения должна быть меньше погрешности предыдущего приближения, т.е. погрешность приближенных значений с каждым шагом должна уменьшаться:

$$|x^* - x_{n+1}| < |x^* - x_n|.$$

Для решения уравнения $f(x) = 0$ **методом Ньютона** используются итерации вида

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1, \dots \ . \qquad (2)$$

При этом, выбор первого члена этой последовательности x_0 нужно сделать ~~методом тыка~~ из каких-то сторонних соображений в некоторой окрестности (α, β) искомого корня x^* этого уравнения.

Оценим скорость сходимости метода Ньютона (не очень строгие рассуждения).

Используем формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(\theta)(x - a)^2, \qquad (3)$$

где θ — некоторая точка, заключенная между x и a.

Взяв в качестве $a = x_n$, и, положив $x = x^*$, получим

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\theta_n)(x^* - x_n)^2,$$

где θ_n — некоторое число из интервала (α, β).

Отсюда, поделив на $f'(x_n)$ и перенеся первые два слагаемых в левую часть, имеем:

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* + x_n = \frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2. \qquad (4)$$

Подсчитаем $x_{n+1} - x^*$, с помощью формулы (2) и (4):

$$x_{n+1} - x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\theta_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2 \qquad (5)$$

Введем погрешность

$$h_n = |x^* - x_n|, n \in \mathbb{N}^0 . \qquad (6)$$

Тогда из (5) и (6) получаем:

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{|f''(\theta)|}{|f'(x_n)|}|x^* - x_n|^2, n \in \mathbb{N} \quad . \qquad (7)$$

Положим

$$M := \max_{[\alpha,\beta]} |f''(x)|, \ \ m := \min_{[\alpha,\beta]} |f'(x)|,$$

Тогда из равенства (7) следует, что

$$h_{n+1} \le \frac{M}{2m} h_n^2, \qquad (8)$$

это говорит о том, что если процесс сходится, то быстро.

Если мы обозначим $A := \dfrac{M}{2m}$, $q := Ah_0$, то из (8) получим

$$h_{n+1} \le \frac{1}{A} q^{2^n} \quad . \tag{9}$$

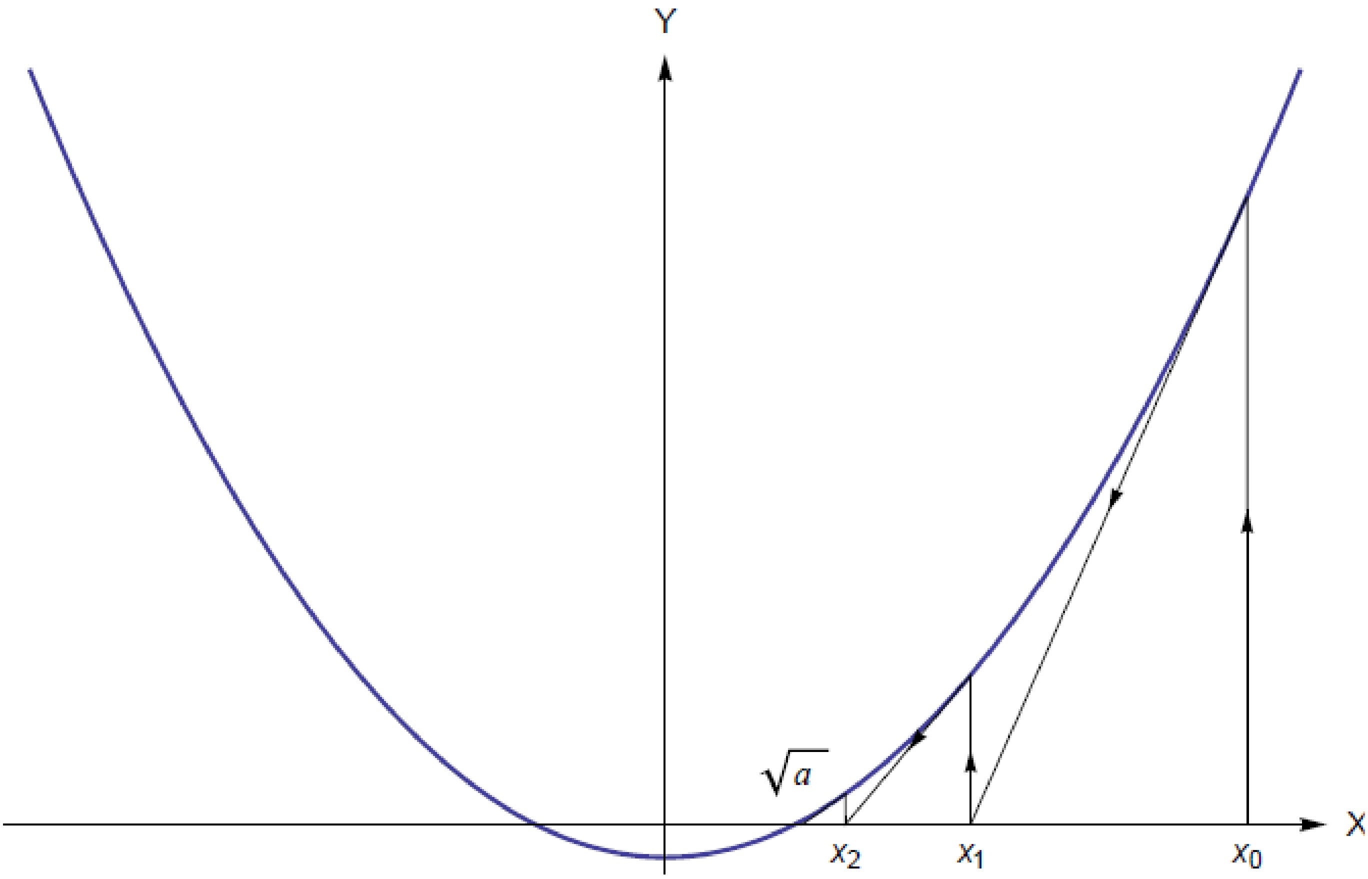
Итак, для приближенного нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью ε нужно:

1) подобрать выбрать сначала α, β и x_0 так, чтобы было выполнено неравенство $q < 1$ (это обеспечит сходимость итерационного процесса);

2) найти (с запасом или точно) значение числа шагов n из условия $\dfrac{1}{A} q^{2^n} < \varepsilon$;

3) воспользоваться формулой (2), сделав n итераций.

Геометрическая интерпретация метода Ньютона



Берем точку x_0, строим касательную в графику в точке $(x_0, f(x_0))$, пусть она пересекает ось Ox в точке x_1. Строим касательную в графику в точке $(x_1, f(x_1))$ и т.д.

Уравнение касательной в точке $(x_n, f(x_n))$: $y(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ — это и даёт нам формулу Ньютона (2), если положить в ней $x = x_{n+1}$.

Пример 1. (выбор начального приближения и оценка скорость сходимости, оценка количества шагов, за которое приближенное значение корня достигнет заданной точности**)**. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = x^3 + x - 3 = 0$$

Это уравнение имеет единственный корень, т.к. функция $y = f(x)$ строго возрастает, причем, $f(1) = -1$, а $f(2) = 5$. Поэтому корень x^* уравнения принадлежит отрезку $[1; 2]$. Если $x_0 \in (1; 2)$, то $h_0 = x_0 - x^* < 1$, а для производных получаем оценки:

$$m = \min_{[1,2]} f'(x) = f'(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4,$$

$$M = \max_{[1,2]} f''(x) = f''(2) = 6 \cdot 2 = 12.$$

Следовательно, $A := \dfrac{M}{2m} = \dfrac{12}{8}$ отсюда величина $q := Ah_0$ может оказаться больше 1 и, тем самым, метод Ньютона нельзя будет применить. Значит выбранный промежуток [1;2] для применения метода Ньютона не совсем подходит (конечно, это при произвольном выборе x_0 из рассматриваемого интервала).

Рассмотрим меньший отрезок [1;3/2], которому корень уравнения заведомо принадлежит, т.к. $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{31}{8} > 0$.

Имеем $h_0 < \frac{1}{2}$. Кроме того,

$$m = \min_{[1,\frac{3}{2}]} f'(x) = f'(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4,$$

$$M = \max_{[1,\frac{3}{2}]} f''(x) = f''(\tfrac{3}{2}) = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9.$$

$$A := \frac{M}{2m} = \frac{9}{8}$$

Отсюда заключаем, что

$$q := Ah_0 < \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16} < 1,$$

что нам и нужно.

Прикинем сколько итераций нам потребуется для достижения точности 10^{-6}, т.е. для выполнения неравенства

$$|h_{n+1}| \le \frac{1}{A} q^{2^n} = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{2^n} \le 10^{-6}.$$

Грубая оценка получится, если мы заменим число 8/9 на 1, а число 9/16 на 1/ 2 и потребуем выполнения неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \le 10^{-6} \text{ т.е. } 2^{2^n} \ge 10^6.$$

Так как

$$2^2 = 4,\ 2^4 = 16,\ 2^8 = 256,\ 2^{16} = 64\cdot 1024 = 65536,$$
$$2^{32} = (64\cdot 1024)^2 > (6\cdot 10^4)^2 = 36\cdot 10^8 > 10^6,$$

то для получения значения искомого корня с точностью до 10^{-6} заведомо хватит 4 шагов.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 10^{-6}.

Итерационная последовательность Ньютона

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{17}{x_n}\right),\ n = 0,1,\ldots \qquad (1)$$

имеет пределом число $\sqrt{17}$ при любом выборе её первого члена $x_0 > 0$ (см файл ВВВ). При этом было доказано, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, приближаясь к корню справа, то есть

$$x_n > \sqrt{17},\ n = 0,1,\ldots\ . \qquad (2)$$

Так как $4 < \sqrt{17} < 5$, то можно, например, выбрать $x_0 = 4{,}2$.

Мы выберем $x_0 = 5$.

Введём оценку погрешности

$$h_n := x_n - \sqrt{17},\ n = 0,1,\ldots \qquad (3)$$

при этом ясно, что $h_0 = 5 - \sqrt{17} < 1$ и $h_n > 0,\ n = 0,1,\ldots$.

Итерационный процесс следует остановить на шаге N, если

$$h_N < 10^{-6}.$$

Чтобы найти это N, нужно оценить погрешность через n. С этой целью докажем, что

$$h_n < \frac{1}{8}h_{n-1}^2\ . \qquad (4)$$

В самом деле,

$$h_n = x_n - \sqrt{17} = \textit{в силу}\ (1) = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{17}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{17} = \frac{1}{2x_{n-1}}\left(x_{n-1} - \sqrt{17}\right)^2.$$

Так как в силу (2): $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{\sqrt{17}}$, то, учитывая обозначение (3) получим:

$$h_n < \frac{1}{2\sqrt{17}}h_{n-1}^2 < \frac{1}{8}h_{n-1}^2$$

и (4) доказано.

Далее, так как $h_0 < 1$, то в силу (4),

$$h_1 < \frac{1}{8},$$

$$h_2 < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = 8\left(\frac{1}{8}\right)^4,$$

$$h_3 < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^6 = \left(\frac{1}{8}\right)^7 = 8\left(\frac{1}{8}\right)^8,$$

$$\ldots$$

$$h_n < 8\left(\frac{1}{8}\right)^{2^n} = 2^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 2^n} = 2^{-3(2^n-1)},\ n = 1,2,\ldots\ .$$

Таким образом, имеем оценку погрешности в зависимости от шага итерации:

$$h_n < 2^{-3(2^n-1)},\ n = 1, 2 \ldots . \qquad (5)$$

Составляем таблицу:

n	$3(2^n-1)$	$2^{3(2^n-1)}$	h_n	Число верных знаков после запятой	$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{17}{x_{n-1}}\right)$
0	-	-	<1	0	$x_0 = 5$
1	3	8	$< 0{,}125$	0	$x_1 = 4{,}2$
2	9	512	< 0.002	2	$x_2 = 4{,}\ 1238095238$
3=N	21	$2\,(1024)^2$	$< 0.5 \cdot 10^{-6}$	6	$x_3 = 4{,}\ 1231056857$

Итак, уже **три итерации** метода Ньютона дают точность 10^{-6}.

Отметим, что приближенное значение $\sqrt{17}$ с десятью верными знаками после запятой равно 4,1231056256. Оно достигается уже на следующем шаге при $N = 4$, более того, на следующем шаге будут верны 15 цифр после запятой. Метод Ньютона сходится очень быстро.

В примере не обсуждается погрешность вычислений. Здесь это некритично. С элементарной теорией погрешностей вычислений вас знакомят на физпрактикуме. Красным обозначены цифры, которые на данном этапе итераций являются сомнительными. Цифры после красных – можно и не писать — они все сомнительные.

Литература

1. Исаак Ньютон. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения. / Под редакцией С.И. Вавилова. –М.-Л.: Издательство Академии наук СССР, 1943.

2. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. /Под редакцией А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 1980.

3. С.Б. Гашков, Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. – М. МЦНМО, 2006.

4. В.В. Вавилов, Метод Ньютона. – Электронная версия статьи.