Информатика. Третий тур олимпиады для 9-10 классов. Задания с решениями.

Предпочтительная форма оформления работы – создание одного файла с решениями всех заданий, которые вы выполните (в том числе можно создать один файл из рукописных сканов работ). В этом случае за работу **начисляется один дополнительный балл**. Если, дополнительно, все решения, включая формулы, таблицы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), то **начисляется еще один балл**.

Каждое задание само по себе вне зависимости от способа оформления оценивается из 6 баллов. В том числе баллы снимаются за недостаточную строгость обоснования даже при наличии правильного ответа.

1. Если число AC_p больше числа C_p на 160_{10}, а число $CEBA_p$ больше числа EBA_p на 49152_{10}, то чему равно число AC_p в десятичной системе счисления? Одинаковыми буквами здесь зашифрованы одинаковые цифры p-ичной системы, разными буквами — разные цифры.

2. Из последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в которой x_i может быть равно 0 или 1, получена последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ по следующему правилу:

$y_i = x_i + x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots n - 1$.

Определите, какие подпоследовательности (непрерывные части последовательности) значений y_i не могут быть получены указанным способом. Обратим внимание, что если, например, не может быть получена подпоследовательность $a\ b$, то подпоследовательности $a\ b\ c$, $c\ d\ a\ b$ и т.п. не являются ответами, поскольку все они уже включают фрагмент $a\ b$. Помимо ответа надо обосновать, что все другие подпоследовательности могут быть получены.

3. Придумайте как можно более короткую логическую формулу от трех переменных x, y, z, использующую только логические операции И, ИЛИ, НЕ (можете ввести свои обозначения для этих операций, принятые в математике или программировании) со следующим свойством: если ровно одна из переменных изменяет свое значение, то и вся формула изменяет свое значение. Обязательно опишите способ получения найденной вами формулы.

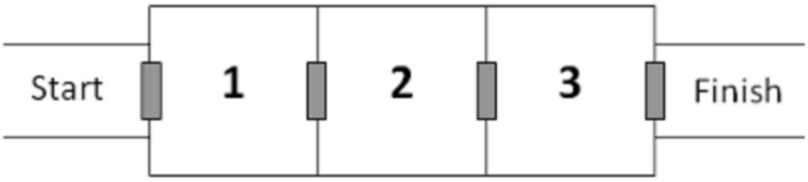
4. В туре 2 была дана следующая программа:

```
НАЧАЛО
  ПОКА нашлось (333) ИЛИ нашлось (999)
    ЕСЛИ нашлось (333)
      ТО заменить (333, 9)
      ИНАЧЕ заменить (999, 3)
    КОНЕЦ
  КОНЕЦ
КОНЕЦ
```

А) Сколько различных последовательностей может получиться в результате применения этой программы к строке, состоящей из некоторого количества девяток?

Б) Сколько различных последовательностей может получиться в результате применения этой программы к строке, состоящей из некоторого количества троек?

5. Некоторый дворец состоит из анфилады из N комнат. Например, для трех комнат он может выглядеть так:



Для входа в любую комнату с любой стороны нужна одна монета. Одновременно нельзя нести более трех монет. Но можно оставлять любое количество монет в любой из комнат. Сколько требуется монет, чтобы пройти через дворец, состоящий из 10 комнат? (приведите ответы и для дворцов, состоящих из 5, 6, 7, 8, 9 комнат соответственно).

Например, для трех комнат, можно поступать так. С помощью одной монеты войти в комнату 1, оставить там монету 2 и вернуться назад с помощью монеты 3. Снова взять три монеты, войти в комнату 1, потратив монету, взять сохраненную монету, и с помощью трех монет теперь можно открыть оставшиеся три двери и выйти с другой стороны дворца.

Критерии оценивания:

1. Ответ 1012 – 2 балла, ответ 172 – 4 балла. + 0..2 балла за обоснование

2. За последовательности 02, 20 – 1 балл, за 02, 20, 010, 212 – 2 балла. Для чётных 02, 20, 0112, 2110 и т. д., для нечётных 010, 212, 01110, 21112 и т. д. За верный ответ 4 балла. За обоснование +2 балла (можно программой или полным перебором с выводом закономерности)

3. Ответ длины 12 (^A&^B& C v ^A& B&^C v A&^B&^C v A& B& C) 4 балла (без скобок). За 13 – 2,14 – 1, >14 – 0. За обоснование + 2 балла. Со скобками всё на 2 ответа меньше.

4. А) 8 ответов. – 2 балла

   Б) 20 ответов. – 3 балла

   обоснование + 1 балла

5. Правильные ответы для 5, 6 – один балл, 7, 8 – один балл 9, 10 – один балл. За обоснование 3 балла. За верную идею, но неправильные ответы, мог быть поставлен один балл (на усмотрение жюри).

   - 5 - 42
   - 6 - 123
   - 7 - 366
   - 8 - 1095
   - 9 - 3282
   - 10 – 9843

Указания к решению:

1.

Составим уравнение:

$AC_p - C_p = A0_p = A * p = 160 = 2^5 * 5$

$CEBA_p - EBA_p = C000_p = C * p^3 = 49152$

Отсюда следует, что p = 16 (оно должно быть целым и число 49152 делится на p^3, небольшой перебор делителей, которые являются точными кубами, и остаётся ровно один ответ), A = 10, C = 12, $AC_p = 10 * 16 + 12 = 172_{10}$

Ответ: 172.

2.

В последовательности могут быть только 0, 1, 2. Заметим, что не может быть 02, 20, 010 и 212. Мы рассмотрели все возможные случаи для длины не более 3 (все остальные можно). После этого можно заметить закономерность, что любое чётное количество единиц, вставленное в середину этих последовательностей, также приводит к невозможному результату. Это связано с тем, что для таких последовательностей, записанных без последней цифры, однозначно восстанавливается первая последовательность (из 0 и 1). Так, если последовательность начинается с 0111, то начальная последовательность восстанавливается однозначно: 0101. А последняя цифра нашей последовательности (в приведенном примере – 0) получена быть не может.

Ответ: 0...2, 2...0, 01…0, 21..2, где вместо … стоит любое чётное количество единиц.

3.

Можно заметить, что подходит xor (исключающее или). Далее выписываем формулу и упрощаем.

Один из ответов: ¬A&¬B& C v ¬A& B&¬C v A&¬B&¬C v A& B& C

С использованием скобок можно получить более короткий ответ. Но в условии задачи не оговаривалось, что скобки можно использовать. Поэтому засчитывались ответы обоих видов.

4.

Проще всего задачу решить программой (не забыть указать, что с какого-то момента результаты циклично повторяются).

Ответ: а) 8, б) 20

P. S. Надо было заменять только первое вхождение, после этого выполнять цикл с самого начала.

5.

Заметим, что для того, чтобы выйти из 4 комнат, нам надо в первую комнату положить 6 монет (для 3 комнат мы знаем, что 6 монет хватит, чтобы выйти). Для каждой, кроме последней монеты нам понадобится ещё по 2 монеты, чтобы зайти и выйти. Рассуждая таким образом можно получить общую формулу (значение для следующего количества формул равно предыдущему минус один, умноженному на три) или посчитать количество монет для всех комнат по очереди.

Ответ: 42, 123, 366, 1095, 3282, 9843.