# Сентябрьская олимпиада (устный тур)

□ *с решениями*

## Довывод

**1.** Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшиеся монеты можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил одинаковую сумму в грошах. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.

□ Если у стоимостей всех монет есть общий делитель $d$, деноминируем их на него (разделим все значения на $d$). Ничего не сломается. Пусть стоимости монет равны $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k$ — число монет; пусть $A$ — стимость всех монет в сумме. Тогда $n \mid (A - a_m)$ для каждой монеты $a_m$, где $n$ — количество разбойников. Отсюда

$$a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_k \pmod{n}.$$

Заметим, что любой общий делитель $a_1$ и $n$ будет делителем и $a_2, \ldots, a_k$; следовательно, $a_1$ и $n$ взаимно просты. Осталось заметить, что

$$A - a_1 \equiv (k-1) \cdot a_1 \pmod{n},$$

откуда $n \mid (k-1)$.

**2.** На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Глеб и Юлик по очереди заменяют звездочки на рациональные числа: вначале Глеб заменяет любую из звездочек, потом Юлик — любую из двух оставшихся, а затем Глеб — оставшуюся звездочку. Верно ли, что при любых действиях Юлика Глеб сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2015?

□ *Ответ:* Да, верно. Пусть Глеб первым ходом сделает свободный член нулевым. У полученного в итоге уравнения точно будет корень 0, а значит, достаточно обеспечить наличие корня 2015. У Юлика есть два варианта хода:

$$x^3 + ax^2 + *x = 0 \quad \text{и} \quad x^3 + *x^2 + ax = 0.$$

Соответствующие ходы Глеба будут

$$x^3 + ax^2 - 2015(a + 2015)x = 0 \quad \text{и} \quad x^3 - (a/2015 + 2015)x^2 + ax = 0.$$

**3.** По кругу записано 2015 действительных чисел. Профессор Воробьёв записал между всеми парами соседних их полусумму, а исходные числа стер. Оказалось, что написан тот же набор чисел, но, возможно, в другом порядке. Докажите, что все числа были равны.

□ *Рабоче-крестьянское решение.* Пусть наибольшее из чисел равно $M$. Если не все числа равны, то числа, равные $M$, образуют несколько групп стоящих рядом чисел. Пусть группы имеют размеры $a_1, \ldots, a_m$. Заметим, что если из двух соседних чисел хотя бы одно меньше $M$, то и полусумма меньше $M$. Таким образом, профессор запишет всего $(a_1 - 1 + a_2 - 1 + \ldots + a_m - 1)$ чисел, равных $M$. Противоречие.

*Хитрое решение.* Так как набор чисел остался таким же, значит не изменилась и сумма квадратов. Обозначим числа через $x_1, \ldots, x_{2015}$. Тогда:

$$x_1^2 + \ldots + x_{2015}^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{2014} + x_{2015}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2015} + x_1}{2}\right)^2 .$$

Это равенство можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{2014} - x_{2015}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_{2015} - x_1}{2}\right)^2 = 0$$

Сумма квадратов действительных чисел равна нулю в том и только в том случае, когда все эти числа равны нулю. Что и требовалось.

**4.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ выполнено $AB = 2CD$. Обозначим прямую, перпендикулярную $CD$ и проходящую через точку $C$, через $l$. Окружность с центром $D$ и радиусом $DA$ пересекает $l$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $AP$ перпендикулярна $BQ$.

□ Окружность из условия обозначим через $\omega$. Продолжим $AD$ и $BC$ до пересечения в точке $X$. Из условия следует, что $CD$ — средняя линия треугольника $AXB$. Тогда $AD = DX$, то есть $X \in \omega$ и $AX$ является диаметром $\omega$ (рис. **??**).

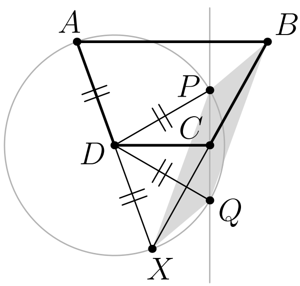


Рис. 1: к решению задачи 4.

Тогда угол $\angle AQX$ прямой, так как опирается на диаметр. Достаточно доказать, что $QX$ параллельна $BP$. Для этого покажем, что $BPXQ$ — параллелограм. $BC = CX$ из-за того, что $CD$ — средняя линия. $PC = CQ$ из-за того, что

$C$ — основание перпендикуляра, опущенного на хорду $QP$ из центра окружности. Так как диагонали делятся пополам точкой пересечения, $BPXQ$ — параллелограм. Что и требовалось доказать.

**5.** Функция $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такова, что для любых целых $x$ и $y$ выполнено:

$$f\bigl(f(x) - y\bigr) = f(y) - f\bigl(f(x)\bigr)\,.$$

Докажите, что $f$ ограничена.

▫ Будем подставлять в уравнение различные значения вместо $x$ и $y$, получая следствия.

- Для произвольного $x$ подставим $y = f(x)$:

  $$f(0) = f\bigl(f(x)\bigr) - f\bigl(f(x)\bigr) = 0\,.$$

  Получаем $f(0) = 0$.

- Для произвольного $x$ подставим $y = 0$:

  $$f\bigl(f(x)\bigr) = -f\bigl(f(x)\bigr)\,.$$

  Получаем $f\bigl(f(x)\bigr) = 0$ для всех $x$; исходное уравнение упрощается до

  $$f\bigl(f(x) - y\bigr) = f(y)\,.$$

- Если $f$ принимает только нулевые значения, то утверждение задачи очевидно. Далее, пусть $f(x_a) = a \neq 0$. Получаем для произвольного $y$:

  $$x = x_a\colon f\bigl(a - y\bigr) = f(y)\,, \qquad x = 0\colon f\bigl(-y\bigr) = f(y)\,.$$

  Отсюда, заменяя $z = -y$, получаем $f(z) = f(z + a)$ для произвольного $z$.

- Таким образом, $f$ — периодическая функция; любая периодическая функция на множестве целых чисел, очевидно, ограничена.

# Вывод

**6.** Даны натуральное число $k$ и многочлены $R(x)$ и $S(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при любом целом $x$ число $\bigl(R(S(x)) - x\bigr)$ делится на $k$. Докажите, что число $\bigl(S(R(x)) - x\bigr)$ тоже делится на $k$ при любом целом $x$.

▫ Рассмотрим многочлены $R$ и $S$ как функции $\mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_k$, где $\mathbb{Z}_k$ — множество вычетов по модулю $k$. Тогда $R(S(x)) \equiv x$ возможно, только если $R$ и $S$ являются взаимно обратными биекциями на $\mathbb{Z}_k$. Тогда верно и $S(R(x)) \equiv x$, что и требовалось.

**7.** Ориентированный граф не содержит ориентированных циклов. Более того, в нем нет ориентированных путей, содержащих более 99 ребер. Докажите, что ребра можно покрасить в два цвета так, что любой одноцветный ориентированный путь будет содержать не более 9 ребер.

▫ Во-первых, заметим, что в данном графе и в любом его подграфе существует вершина, из которой не выходит ребер. (В противном случае мы могли бы последовательно идти по ребрам и построить цикл.) Разобьем вершины графа на *слои.* В первый слой поместим все вершины, из которых не выходит ребер. Выкинем их из графа и рассмотрим оставшийся подграф. Во второй слой поместим все вершины полученного подграфа, из которых не выходит ребер. Аналогично, выкинем их из графа, выделим третий слой и т. д. Так как в каждом слое хотя бы по одной вершине, то процесс завершится.

Заметим, что из любой вершины слоя $N$ ведет хотя бы одно ребро в слой $(N-1)$ — иначе эта вершина сама бы попала в слой $(N-1)$. Если бы слой 101 существовал, то из любой его вершины можно было бы построить цепочку, проходящую по вершинам каждого из предыдущих слоев. В такой цепочке было бы 100 ребер, что запрещено условием. Таким образом, слоев не более 100. Заметим также, что в любой цепочке все вершины должны быть из разных слоев.

Сгруппируем слои в *коржи:* первый корж содержит слои 1–10, второй содержит слои 11–20, и т. д. Коржей получится не более 10. Покрасим ребра, соединяющие слои из одного и того же коржа, в белый цвет, а ребра, соединяющие слои из разных коржей, — в черный. Тогда любая белая цепочка полностью содержится в одном из коржей, и в ней не более 10 вершин. А любая черная цепочка содержит не более чем по одной вершине из каждого коржа, и в ней тоже не более 10 вершин.

**8.** На окружности единичного радиуса отмечено 60 точек. Докажите, что на этой окружности найдется точка, для которой сумма расстояний до отмеченных точек не превосходит 80.

▫ Обозначим данные точки $X_1, X_2, \ldots, X_{60}$. Возьмем на окружности три точки $A$, $B$, $C$, которые делят окружность на три равные дуги (произвольным образом). Докажем, что одна из этих точек подходит.

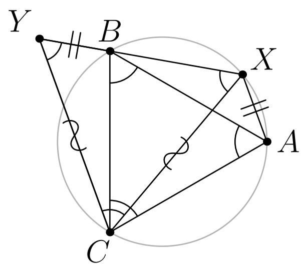


Рис. 2: к лемме в решении задачи 8.

*Лемма.* Если точка $X$ лежит на меньшей дуге $AB$ (включая концы), то $AX + BX = CX$.
*Доказательство леммы.* Рассмотрим поворот вокруг точки $C$ на $\pm\pi/3$ такой, что $A$ переходит в $B$. Пусть $X$ при этом переходит в $Y$ (рис. **??**). Тогда треугольник $CXY$ равносторонний, причем точка $B$ лежит на стороне $XY$. Отсюда $CX = XY = BX + BY = BX + AX$.

*Следствие.* Для каждой точки $X_k$ верно $AX_k + BX_k + CX_k \leqslant 4$.
Действительно, предполагая без ограничения общности, что $X_k$ лежит на меньшей дуге $AB$, получаем $AX_k + BX_k + CX_k \leqslant 2CX_k \leqslant 4$.

Суммируя предыдущее неравенство по всем $k$, получаем

$$\sum_{k=1}^{60} AX_k + \sum_{k=1}^{60} BX_k + \sum_{k=1}^{60} CX_k = 4 \cdot 60 = 3 \cdot 80\,.$$

Следовательно, одна из сумм не превосходит 80.

*Другое решение.* Вычислим *среднее* расстояние от произвольной точки на окружности до данной точки $X$ (тоже на окружности). Введем на окружности радианные координаты с началом в точке $X$. Точку с координатой $\varphi$ будем обозначать $A(\varphi)$ (так что $X = A(0)$). Тогда искомое среднее равно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{dist}\bigl(X, A(\varphi)\bigr)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin(\varphi/2)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot\bigl(-4\cos(\varphi/2)\bigr)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{4}{\pi}\,.$$

Следовательно, среднее суммарное расстояние до всех данных 60 точек равно $240/\pi$, что меньше 80. Значит, для одной из точек окружности суммарное расстояние действительно меньше 80.