Сентябрьская олимпиада (письменный тур)

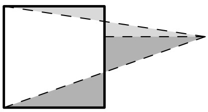
☐ *с решениями*

1. На острове живут и рыцари, и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечетным? (Людей, сказавших каждую из фраз, лжецов и рыцарей ненулевое количество.)

☐ Ясно, что если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, то либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов четное число, а во втором и тех, и других — нечетное число. Значит, число людей на острове обязательно четно.

2. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

☐ Одно из решений изображено на рисунке:



3. Несколько команд сыграли однокруговой турнир (каждая сыграла по разу с каждой) без ничьих. Докажите, что найдется команда A такая, что для любой другой команды B или A победила B, или A победила кого-то, кто победил B.

☐ Рассмотрим команду с наибольшим числом побед (любую из них, если их несколько). Докажем, что она подходит в качестве команды A; пусть $\widehat{A}$ — команды, у которых выиграла A. Действительно, рассмотрим любую другую команду B. Если она проиграла команде A, то все хорошо. Пусть B выиграла у A. Если она проиграла одной из команд из множества $\widehat{A}$, то все хорошо. В оставшемся случае получаем, что B выиграла у всех команд из $\widehat{A}$ и у самой A; то есть у B больше побед, чем у A — противоречие.

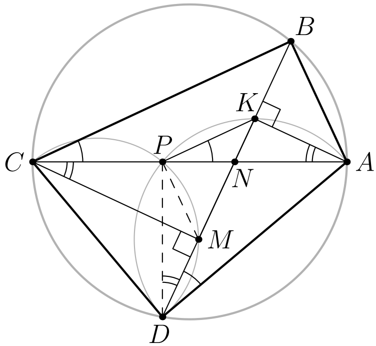
4. Профессор Юлий придумал натуральное число. Петя Торт может не менять число, либо изменить в нем одну любую цифру, либо изменить две подряд идущие цифры. Всегда ли Петя сможет получить простое число?

☐ *Ответ:* нет, не всегда. Пусть профессор задумал число $(100!)^3$. Так как последняя цифра этого числа ноль, она должна быть изменена. Таким образом, Петя может получить число $(100!)^3 + a$, где $0 < a < 100$. Если $a >$

1, то $(100!)^3 + a$ делится на a, то есть не является простым. Если $a = 1$, то $(100!)^3 + 1$ делится на $100! + 1$, то есть не является простым.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM — прямой.

☐ (Рассматривается случай, когда точки B, K, M, D лежат на прямой BD в указанном порядке.)



1. Из вписанности $ABCD$ следует, что $\angle CBD = \angle CAD$.
2. Из параллельности, $\angle CBD = \angle PKD$.
3. Так как $\angle CAD = \angle PKD$, $AKPD$ вписан.
4. Из вписанности $AKPD$, $\angle KAP = \angle KDP$.
5. Обозначим точку пересечения AC и BD через N. Треугольники ANK и CNM подобны по двум углам.
6. Из подобия следует, что $\angle KAP = \angle MCP$.
7. Так как $\angle MCP = \angle KAP = \angle MDP$, четырехугольник $CPMD$ вписан.
8. Значит, $\angle DCP = \angle KMP$.
9. $90^\circ = \angle DCP + \angle PAD = \angle KMP + \angle PKM$. Значит, $\angle KPM = 90^\circ$.

6. Петя Торт загадывает многочлен $P(x)$ с целыми *неотрицательными* коэффициентами. Барон Мюнхгаузен говорит целое число a, Петя сообщает ему значение $P(a)$. Барон утверждает, что при любом ответе он может назвать такое число b, что числа $P(b)$ ему будет достаточно, чтобы гарантированно угадать $P(x)$. Врет ли барон?

☐ *Ответ:* нет, не врет. Пусть $a = 1$. Тогда $P(a)$ — сумма коэффициентов многочлена $P(x)$. Пусть $b = P(a) + 1$. Тогда каждый из коэффициентов многочлена меньше b. Число $P(b)$ мы можем представить в b-ичной системе счисления:

$$P(b) = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \ldots + c_N b^N \,, \quad c_k < b\,.$$

Так как такое представление единственно, то «цифры» c_k совпадут с соответствующими коэффициентами многочлена $P(x)$.