Командная олимпиада, 10-11 класс

1. (3) Можно ли пронумеровать числами от 1 до 8 вершины куба так, чтобы сумма чисел на каждом ребре была различной?

   Решение: будем рассуждать от противного. Предположим это возможно, тогда минимальная возможная сумма: 1+2, а максимально возможная сумма 7+8, то есть сумма варьируется от 3 до 15 (всего 13 вариантов). Кроме этого сумма всех 12 чисел на ребрах равна $(1+\dots+8)\times 3 = 108$, сумма $3+\dots+15 = 117$. Таким образом на ребрах должны быть написаны числа $3, \dots, 8, 10, \dots, 15$. Но не трудно заметить, что 13, 14 и 15 одновременно получить невозможно(15=7+8, 14=6+8, тогда 6 и 7 не находятся на одном ребре и 13 получить невозможно).

2. (4) Решите в натуральных числах уравнение
$$x^4 + x^2 = 7^z y^2.$$

   Решение: $7|x^4 + x^2$, то есть $7|x^2$ или $7|x^2 + 1$. Если $7|x^2$, то z – четное, тогда $\frac{7^z y^2}{x^2} = x^2+1$ – полный квадрат, противоречие. Если $7|x^2+1$, то $x^2 \equiv 6\ (mod\ 7)$, что невозможно.

3. (6) AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH = AG$.

   Решение: $\angle BFA = 90$, так как AB – диаметр. Тогда $\angle FDB = 90 - \angle FBD = \angle ABF = \angle AEF$(последнее равенство получается из-за того, что точки A, E, B, F лежат на одной окружности). Таким образом точки C, E, F, D лежат на одной окружности. Тогда $\angle ECF = \angle EDF$, получается $\frac{\breve{EA}-\breve{HF}}{2} = \angle EDF = \angle ECF = \frac{\breve{AF}-\breve{EG}}{2}$. Из этого следует $\breve{GA} = \breve{EA} + \breve{EG} = \breve{AF} + \breve{HF} = \breve{HA}$. Из этого следует, что $AH = AG$.

4. (6) Клетки шахматной доски 8×8 раскрашены в белый и черный цвета таким образом, что в каждом квадрате 2×2 половина клеток черные и половина белые. Сколько существует таких раскрасок?

   Решение: есть два случая. Первый: если в первом столбце есть два подряд идущих одноцветных квадрата, тогда раскраска все доски восстанавливается однозначно. Таких раскрасок $2^8 - 2$. Второй случай: есть в первом столбце цвета чередуются, тогда во втором столбце цвета также должны чередоваться и так далее. Для каждого столбца есть два варианта чередования(начиная с белого и начиная с черного). Получается еще 2^8 вариантов. Итого: 510.

5. (7) Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство
$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \le \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\ .$$

   Решение: из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для положительных чисел $\frac{1}{b^3}$, $\frac{1}{c^3}$, $\frac{1}{d^3}$ следует, что $\sqrt[3]{\frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{c^3} \cdot \frac{1}{d^3}} \le \frac{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}{3}$.

   Другими словами
   $\frac{1}{bcd} \le \frac{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}{3}$.

   Аналогично
   $\frac{1}{cda} \le \frac{\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}}{3}$,
   $\frac{1}{dab} \le \frac{\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{3}$,
   $\frac{1}{abc} \le \frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}$.

   Просуммировав все три выражения мы получаем
   $\frac{a+b+c+d}{abcd} = \frac{1}{bcd}+\frac{1}{cda}+\frac{1}{dab}+\frac{1}{abc} \le \frac{\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}}{3} + \frac{\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}}{3} + \frac{\frac{1}{d^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{3} + \frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$.

6. (7) Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу вневписанной окружности того же треугольника напротив вершины A. Вневписанная окружность касается прямых BC, AC, AB в точках M, N, L. Докажите, что O (центр описанной окружности) является ортоцентром треугольника MNL.

   Решение: I_a – центр вневписанной окружности. Пусть BI_a пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точке K. Тогда, из-за того, что BI_a внешняя биссектриса $\triangle ABC$, K – середина $\breve{ABC}$, поэтому $OK \perp AC$. Заметим, что $I_aN \perp AC$ и $OK = I_aN$, получается $KONI_a$ – параллелограмм, тогда $KI_a || ON$. Но $LM \perp KI_a$(так как L симметрична M относительно BI_a) $\iff LM \perp ON$. Из чего следует, что O – ортоцентр $\triangle MNL$.

7. (8) В Табулистане несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из каждого города в каждый можно добраться по дорогам. Из столицы выходит d дорог, в том числе одна в Петушки. Экономный Президент хочет закрыть несколько дорог так, чтобы всё ещё можно было бы добраться из каждого города в каждый, но закрытие любой из оставшихся дорог нарушало бы это свойство. Докажите, что количество способов сделать это, не закрывая дорогу из Столицы в Петушки, не менее $\frac{1}{d}$ от общего количества способов сделать это.

   Решение: рассмотрим граф, где города - вершины, а дороги - ребра. Очевидно, что после того, как Президент закроет несколько дорог, мы получим остовное дерево нашего графа. Рассмотрим множество остовных деревьев без ребра Столица-Петушки(далее ребро С-П). Построим из этого множества отображение в множество остовных деревьев с ребром С-П. Будем это делать следующим образом: пусть Γ – остовное дерево без ребра С-П, добавим в него это ребро. Тогда у нас должен появится цикл, проходящий через ребро С-П. Этот цикл также содержит ребро, соединяющее Столицу с другим городом, удалим это ребро. Тогда мы получим другое остовное дерево первоначального графа, но уже с ребром С-П.

Отсюда нетрудно понять, что для каждого остовного дерева с ребром С-П в нашем отображении будет существовать не более $(d-1)$ прообраза, что и доказывает утверждение задачи.

8. (9) В остроугольном треугольнике ABC угол B больше угла C. M – середина BC. Точки D и E – основания высот, опущенных из вершин C и B соответственно. K и L – середины ME и MD. Пусть KL пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC в точке T. Докажите, что $TA = TM$.

   Решение: Из-за того, что точки B, D, E, C лежат на одной окружности, следует, что $\angle BCE = \angle EDA$. А из-за параллельности AT и BC $\angle BCE = \angle EAT$. Таким образом AT является касательной к описанной окружности треугольника ADE(так как $\angle EDA = \angle EAT$). Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. Тогда $\angle HEM = \angle HBM = 90 - \angle BCA = \angle HAE$(первое равенство следует из того, что медиана EM прямоугольного треугольника BEC равна $BM = \frac{1}{2}BC$). Таким образом EM (и аналогично DM) является касательной к описанной окружнсти четырехугольника $DAEH$. То есть KL – радикальная ось описанной окружности четырехугольника $DAEH$ и точки M. А так как AT – касательная, то, очевидно, что $TA = TM$.

9. (10) Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяющее

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2)$$

   для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

   Решение: подставим $x = 0$ и $y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
   $f(x^3 + 0^3) = x^2 f(x)$
   $f(0^3 + x^3) = x f(x^2)$

   Поэтому $f(x^3) = x^2 f(x) = x f(x^2)$ и $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$

   Из этого следует, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$
   $y = -x \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, то есть f – нечетна. Далее будем считать, что аргумент больше нуля.

   Тогда $x^2 f(x) = x f(x^2) \Rightarrow f(x^2) = x f(x)$
   Получается
   $f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x)+f(1)) = xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)$
   Но с другой стороны
   $f((x+1)^2) = f(x^2+x+x+1) = f(x^2)+f(x)+f(x)+f(1) = xf(x)+2f(x)+f(1)$
   Приравнивая эти выражения мы получаем
   $xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$
   $f(x) = xf(1)$
   То есть $f(x) = ax$. Очевидно, что все такие функции удовлетворяют условию задачи.