

## Командная олимпиада, 8-9 класс

1. (4) Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что  $(1+x)(1+y) = 2$ . Докажите, что  $xy + \frac{1}{xy} \geq 6$

Решение: Из выражения  $(1+x)(1+y) = 2$  нетрудно получить  $x+y = 1-xy$ , тогда

$$(x+y)^2 = (1-xy)^2 \geq 4xy$$

$$1-2xy+(xy)^2 \geq 4xy$$

$$(xy)^2 + 1 \geq 6xy$$

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 6$$

2. (4) За круглым столом сидят 2015 человек. Раз в минуту любые двое, являющиеся друзьями, могут поменяться местами. Оказалось, что, потратив некоторое время, люди за столом могут сесть в произвольном порядке. Какое минимальное количество пар друзей среди этих 2015 человек?

Решение: рассмотрим граф, в котором вершинами будут люди, и две вершины будут соединены ребром, если соответствующие два человека дружат. Чтобы получить произвольный порядок, необходимо уметь менять местами любых двух людей. Для этого нам необходимо, чтобы соответствующий граф был связным. При этом, нетрудно понять, что связности нам достаточно. Получается, что искомым граф с минимальным количеством ребер – дерево на 2015 вершин, то есть минимальное количество ребер-дружб 2014.

3. (5) Можно ли пронумеровать числами от 1 до 8 вершины куба так, чтобы сумма чисел на каждом ребре была различной?

Решение: будем рассуждать от противного. Предположим это возможно, тогда минимальная возможная сумма:  $1+2$ , а максимально возможная сумма  $7+8$ , то есть сумма варьируется от 3 до 15 (всего 13 вариантов). Кроме этого сумма всех 12 чисел на ребрах равна  $(1+\dots+8) \times 3 = 108$ , сумма  $3+\dots+15 = 117$ . Таким образом на ребрах должны быть написаны числа  $3, \dots, 8, 10, \dots, 15$ . Но не трудно заметить, что 13, 14 и 15 одновременно получить невозможно ( $15=7+8$ ,  $14=6+8$ , тогда 6 и 7 не находятся на одном ребре и 13 получить невозможно).

4. (6) 2015 монет лежат в 5 сундуках. Количество монет в сундуках – 5 подряд идущих чисел. Иван Дурак может взять из любого сундука 4 монеты и разложить их по оставшимся сундукам. Эту операцию он может повторить сколько угодно много раз. В любой момент Иван сможет забрать все монеты из одного сундука. Какое наибольшее количество монет сможет забрать Иван Дурак?

Решение: заметим, что первоначально в сундуках лежит 401, 402, 403, 404, 405 монет. У всех этих чисел разные остатки при делении на 5. При продельвание нашей операции совокупность остатков при делении на 5 остается неизменной. Таким образом мы оставим как минимум  $0+1+2+3=6$  монет, получив набор монет 0, 1, 2, 3, 2009 (это можно сделать вычитая по 4 монеты из первых четырех сундуков, пока это возможно).

5. (7)  $AB$  – диаметр окружности  $\omega$ . Прямая  $\ell$  касается окружности  $\omega$  в точке  $B$ . Точки  $C, D$  выбраны на  $\ell$  таким образом, что  $B$  находится на отрезке  $CD$ .  $E,$

$F$  – точки пересечения  $\omega$  и прямых  $AC, AD$  соответственно, а  $G, H$  – точки пересечения  $\omega$  и прямых  $CF, DE$ . Докажите, что  $AH = AG$ .

Решение:  $\angle BFA = 90$ , так как  $AB$  – диаметр. Тогда  $\angle FDB = 90 - \angle FBD = \angle ABF = \angle AEF$  (последнее равенство получается из-за того, что точки  $A, E, B, F$  лежат на одной окружности). Таким образом точки  $C, E, F, D$  лежат на одной окружности. Тогда  $\angle ECF = \angle EDF$ , получается  $\frac{\overset{\frown}{EA}-\overset{\frown}{HF}}{2} = \angle EDF = \angle ECF = \frac{\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{EG}}{2}$ . Из этого следует  $\overset{\frown}{GA} = \overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{EG} = \overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{HF} = \overset{\frown}{HA}$ . Из этого следует, что  $AH = AG$ .

6. (7) Клетки шахматной доски  $8 \times 8$  раскрашены в белый и черный цвета таким образом, что в каждом квадрате  $2 \times 2$  половина клеток черные и половина белые. Сколько существует таких раскрасок?

Решение: есть два случая. Первый: если в первом столбце есть два подряд идущих одноцветных квадрата, тогда раскраска все доски восстанавливается однозначно. Таких раскрасок  $2^8 - 2$ . Второй случай: есть в первом столбце цвета чередуются, тогда во втором столбце цвета также должны чередоваться и так далее. Для каждого столбца есть два варианта чередования (начиная с белого и начиная с черного). Получается еще  $2^8$  вариантов. Итого: 510.

7. (8)  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  – положительные числа. Докажите, что максимальное значение выражения

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2) \dots (a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}$$

существует и найдите его.

Решение: заметим, что из неравенств о средних для трех чисел следует

$$1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a_1^2}{4}}$$

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a_1 a_2^2}{4}}$$

...

$$a_{n-1} + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a_{n-1} a_n^2}{4}}$$

$$a_n + 2^n + 2^n \geq 3 \sqrt[3]{a_n 2^{2n}}$$

Тогда

$$(1+a_1)(a_1+a_2) \dots (a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1}) \geq 3^{n+1} a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n.$$

Таким образом максимальное значение выражения равно  $\frac{1}{3^{n+1}}$ , причем равенство достигается, когда  $a_i = 2^i$ .

8. (9)  $ABC$  – равнобедренный треугольник ( $AB = AC$ ). На продолжениях сторон  $BC, AB$  и  $AC$  выбраны точки  $P, X, Y$  таким образом, что  $PX \parallel AC$  и  $PY \parallel AB$  и точка  $P$  лежит на луче  $CB$ . Точка  $T$  – середина дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  ( $T \neq A$ ). Докажите, что  $PT \perp XY$ .

Решение: пусть  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда из-за того, что треугольник  $ABC$  равнобедренный следует, что  $O$  – середина  $AT$  и  $\angle XBO = 180 - \angle OBA = 180 - \angle OAB = 180 - \angle OAC = \angle OAY$ .  $XPYA$  – параллелограмм, из этого следует, что  $R = XY \cap PA$  – середина  $XY$  и  $PA$ , а также что  $YA = PX = PB$  (второе равенство следует из того, что треугольник  $PXB$  равнобедренный). Тогда треугольники  $XBO$  и  $OAY$  равны по двум сторонам и углу между ними ( $OA=OB$ ,  $BX=AY$ ,  $\angle OBX=\angle OAY$ ). Получается  $OR$  – серединный перпендикуляр в равнобедренном треугольнике  $YOX$ . При это  $OR$  – средняя линия треугольника  $APT$ . То есть  $PT \perp XY$  следует из того, что  $OR \parallel PT$  и  $OR \perp XY$ .

9. (10) Пусть даны натуральное  $n > 1$  и простое  $p$ , причем  $n \mid (p-1)$  и  $p \mid (n^3-1)$ . Докажите, что  $(4p-3)$  – точный квадрат.

Решение:  $p \mid (n-1)(n^2+n+1)$

Если  $p \mid n-1$ , то  $n-1 \geq p > p-1 \geq n$ , противоречие.

Тогда  $p \mid n^2+n+1$ . Пусть  $p = nk+1$ , где  $k \geq 1$

$$p \mid (n^2+n+1) - p$$

$$p \mid (n^2+n+1) - (nk+1)$$

$$p \mid n(n-k+1)$$

$$p \mid n-k+1$$

Если  $n-k+1 \neq 0$ , то  $n-k+1 \geq p = nk+1$ , получается  $n(k-1)+k \leq 0$ , противоречие.

Таким образом  $n-k+1 = 0$

$$p = nk+1 = n^2+n+1$$

$$4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$