

Регата (с решениями)

Младшая лига

Первый тур

- 1а. Найдите все пары целых чисел x и y такие, что $x^2 = y + 90$, $y^2 = x + 90$.

□ Ответ: $x = -9, y = -9$ или $x = 10, y = 10$.

Если $x = y$, то $x^2 = x + 90$, откуда $x = y = 10$ или $x = y = -9$. Если $x \neq y$, вычтем из первого уравнения второе: $(x - y)(x + y) = -(x - y)$. Поделив на $(x - y) \neq 0$, получаем $x + y = -1$, или $x = -y - 1$. Подставив это в первое уравнение, получим $y^2 + 2y + 1 = y + 90$, откуда $y^2 + y - 89 = 0$. Но у такого уравнения корни $\frac{-1 \pm \sqrt{357}}{2}$, и целых решений нет.

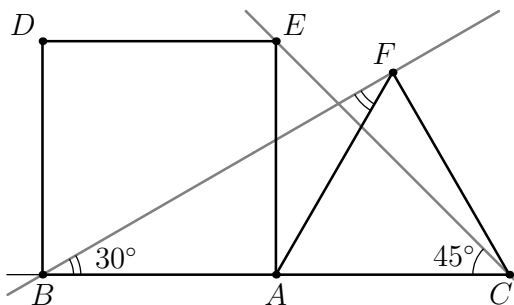


Рис. 1: к задаче 1г

- 1г. На прямой отмечены различные точки A, B и C таким образом, что $AB = AC = 1$. На отрезках AB и AC в одну полуплоскость построены квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник ACF соответственно. Найдите угол между прямыми BF и CE .

□ Ответ: 75° .

Рис. 1. Это третий угол в треугольнике с углами 45° и 30° . Но так как угол между прямыми всегда считается острым или прямым, то нам нужно взять его дополнение до смежного.

- 1с. В ряд стоят 2000 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из них заявил: «Слева от меня лжецов больше, чем рыцарей справа». Сколько всего среди них рыцарей?

□ Ответ: 1000 рыцарей.

Рассмотрим задачу для $2n$ человек, и докажем, что из них ровно n рыцарей. Заметим, что если бы лжецов вообще не было, то все утверждения были бы неверны. Такого

быть не может, значит, хотя бы один лжец есть. Это делает утверждение крайнего правого человека истинным, то есть он рыцарь. С другой стороны, утверждение крайнего левого не может быть истинным ни при каких обстоятельствах, то есть он лжец. Заставим их обоих покинуть ряд.

Заметим, что для каждого из тех, кто стоял между ними, количество рыцарей справа уменьшилось на 1, как и количество лжецов слева. Значит, истинность их утверждений не изменилась, и мы свели задачу к случаю $(2n - 2)$. Применяв индукцию, получаем, что среди оставшихся людей ровно $(n - 1)$ рыцарей. Значит, в исходной задаче их было n .

Второй тур

2а. Докажите, что если числа a, b и c лежат в интервале $(0; 1)$, то $a + b + c < 2 + abc$.

□ Заметим, что $a + b < 1 + ab$, так как $1 - a - b + ab = (1 - a)(1 - b) > 0$. Аналогично, $ab + c < 1 + abc$ следует из $1 - ab - c + abc = (1 - ab)(1 - c) > 0$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

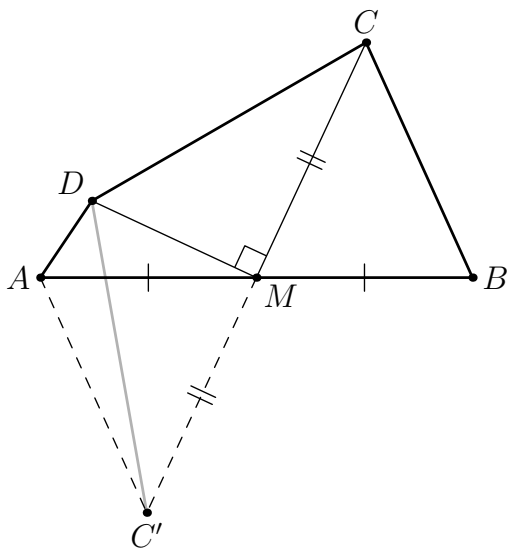


Рис. 2: к задаче 2г

2г. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AB . Докажите, что если угол DMC — прямой, то $AD + BC \geqslant CD$.

□ Отразим точку C относительно точки M (рис. 2). Тогда треугольник CDC' будет равнобедренным, так как DM в нем будет медианой и высотой. С другой стороны, так как A и B тоже симметричны относительно M , то $BC = AC'$. Тогда

$$AD + BC = AD + AC' \geqslant DC' = DC.$$

- 2с. В шахматной доске удалили 4 угловых клетки. Сколькими способами можно расставить на оставшиеся клетки 4 попарно не бьющие друг друга ладьи? (Способы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются различными.)

□ Ответ: 89100.

Заметим, что если бы угловые клетки не были отпилены, то количество способов расставить ладьи было бы равно

$$A_0 = \frac{8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2}{4!},$$

так как первую ладью можно поставить на любую клетку (8^2), вторую только на неза занятые строки и столбцы (7^2), и т. д. Ладьи одинаковые, поэтому придется разделить на $4!$. Вычтем из этого числа количество способов расставить ладьи так, чтобы одна из них попала в угол:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2}{3!}$$

(«угловую» ладью можно разместить четырьмя способами, а оставшиеся аналогично предыдущему выражению). Однако в выражении A_1 дважды подсчитываются варианты, при которых сразу две ладьи стоят в углах. Их нужно подсчитать, чтобы вычесть уже из A_1 :

$$A_2 = 2 \cdot \frac{6^2 \cdot 5^2}{2!}$$

(пара ладей может располагаться только в противоположных углах). Получаем

$$\begin{aligned} A_0 - (A_1 - A_2) &= 16 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5^2 - 4 \cdot 7^2 \cdot 6 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5^2 = 150 \cdot (6 + 12 \cdot 7^2) = \\ &= 150 \cdot 6 \cdot 99 = 900 \cdot 99 = 89100. \end{aligned}$$

Третий тур

- 3а. Неравнобедренный треугольник называется *интересным*, если его стороны выражаются натуральными числами, причем одно из этих чисел делится на 5, другое на 80, а третье — на 112. Какое наименьшее значение может принимать сторона интересного треугольника?

□ Ответ: 20.

Треугольник со сторонами 20, 240, 224 является интересным. Докажем, что меньше 20 сторона быть не может.

Пусть a — сторона, делящаяся на 5, b — на 80, c — на 112. Очевидно, что b и c больше 20, поэтому достаточно доказать, что a не может быть меньше 20. Так как b и c делятся на 16 и различны, то модуль разности между ними не меньше 16. Из неравенства треугольника следует, что $a > |b - c| \geq 16$. Так как $5 \mid a$, то $a \geq 20$.

- 3г. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую AD , пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E , отличной от B . Докажите, что точки A , E и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.

□ Рис. 3. Достаточно доказать, что $\angle DAE = \angle DAO$, причем углы следует считать ориентированными (изображенные на рисунке углы считаем положительными). Действительно, $\angle DAE = \angle DBE$, так как точки D, E, A и B лежат на одной окружности. Далее, $\angle DBE = 90^\circ - \angle BDA$ из прямоугольного треугольника. Наконец, угол между биссектрисой и стороной $\angle BDA = 180^\circ - \alpha/2 - \beta$, откуда

$$\angle DAE = 90^\circ - (180^\circ - \alpha/2 - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^\circ.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\angle DAO &= \angle DAC - \angle OAC = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \angle COA}{2} = \\ &= \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \angle CBA = \frac{\alpha}{2} + \beta - 90^\circ.\end{aligned}$$

Следует отметить, что при других расположениях точек углы $\angle DAE$ и $\angle DAO$ могут поменять ориентацию и стать отрицательными; тем не менее, все равенства и вывод останутся верными.

3с. Найдите количество раскрасок клетчатой полоски 1×2015 , удовлетворяющих следующим условиям:

(i) каждая из клеток покрашена в красный, синий или зеленый цвет.

(ii) каждые две соседние клетки покрашены в разные цвета.

(iii) ни одна клетка с нечетным номером не покрашена в синий цвет.

□ Ответ: $2 \cdot 3^{1007}$.

Будем доказывать по индукции, что для полоски $1 \times (2n + 1)$ получается $2 \cdot 3^n$ вариантов.

База: для $n = 0$ (одна клетка, она с нечетным номером) получаем 2 варианта.

Переход. Пусть для полоски $1 \times (2n - 1)$ получилось $2 \cdot 3^{n-1}$ вариантов. Тогда каждый вариант, оканчивающийся на К[расный] цвет, можно докрасить до $1 \times (2n + 1)$ тремя способами: ...-С-К, ...-С-З, ...-З-К. Аналогично, каждый вариант раскраски, оканчивающийся на З[еленый], можно дополнить тоже тремя способами. Следовательно, для новой полоски будет $2 \cdot 3^n$ вариантов, что завершает переход индукции.

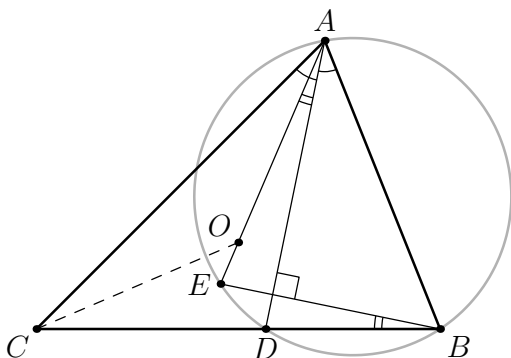


Рис. 3: к задаче 3г

Четвертый тур

- 4а. На доске написано натуральное число N . Каждую минуту происходит следующая операция: в числе стирается последняя цифра и вычитается она же утроенная из полученного числа (например, число 12345 преобразуется в $(1234 - 3 \cdot 5) = 1219$). При каких N на доске в какой-то момент появится число 0?

□ Ответ: при N , кратных 31.

Пусть число N представляется в виде $10a + b$, где b — последняя цифра. Тогда следующее число равно $N' = a - 3b$. Получаем $3N + N' = 31a$. Значит, если N делится на 31, то и N' тоже делится. А если N не делится, то и N' не делится. Ноль — последнее число — кратен 31, поэтому исходное число тоже должно делиться на 31.

Осталось доказать, что, начав с числа, кратного 31, мы обязательно придем к нулю. Если $N = 31k$, где $k \leq 9$, то $N = 3k \cdot 10 + k$, и следующее же число будет нулем. Если же $N = 310m + 31k$, где $m > 0$ и $0 \leq k \leq 9$, то $N' = 31m + 3k - 3k > 0$. Таким образом, среди отрицательных чисел наш процесс свою жизнь не закончит, что завершает доказательство.

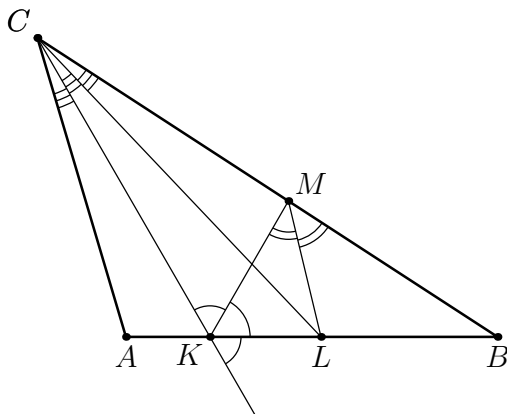


Рис. 4: к задаче 4g

- 4g. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки K и L таким образом, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на стороне BC такова, что $\angle BKM = \angle MKC$. Оказалось, что ML — биссектриса угла KMB . Найдите $\angle CLM$.

□ Ответ: 30° .

Рис. 4. Заметим, что по отношению к треугольнику KCM точка L лежит на биссектрисе CL и на внешней биссектрисе ML . Отсюда следует, что L — центр вневписанной окружности этого треугольника, и KL — также внешняя биссектриса. Это возможно только если $\angle BKM = \angle MKC = 60^\circ$. Тогда

$$\angle MLC = \angle LMB - \angle LCB = \frac{\angle KMB - \angle KCB}{2} = \frac{\angle MKC}{2} = 30^\circ.$$

4с. В турнире по настольному теннису участвовало $N > 3$ человек, каждый из которых сыграл ровно один раз с каждым из остальных (ничьих в теннисе не бывает). Оказалось, что каждый из участников одержал хотя бы одну победу. Докажите, что найдутся трое участников A, B и C такие, что A выиграл у B , B выиграл у C , C выиграл у A .

□ Рассмотрим произвольного игрока B_0 . Выберем любого B_1 из тех, у кого выиграл B_0 ; выберем любого B_2 из тех, у кого выиграл B_1 ; и т. д. Так как каждый игрок у кого-то выиграл, мы сможем продолжать это до тех пор, пока не получим $B_m = B_k$ для некоторых $m < k$. Значит, мы нашли цикл из $(k - m)$ игроков, которые выиграли друг у друга по кругу.

Обозначим их $A_1, A_2, \dots, A_n$, где игрок A_1 выиграл у A_2 , ..., A_{n-1} выиграл у A_n , A_n у A_1 . (Заметим, что обязательно $n \geq 3$). Если $n = 3$, то мы решили задачу, иначе этот цикл нужно уменьшить до 3 игроков. Если A_{n-1} проиграл A_1 , то тройка A_1, A_{n-1}, A_n подходит. Иначе можно выбросить A_n из цикла; уменьшая цикл таким образом далее, мы придем к $n = 3$.

Старшая лига

Первый тур

1а. Даны такие натуральные числа a, b и c , что $\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c}$ рационально. Докажите, что число $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ целое.

□ Пусть

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c} = \frac{p}{q}.$$

После преобразований получим $(aq - bp)\sqrt{3} = cp - bq$. Так как $\sqrt{3}$ иррационально, то $aq - bp = cp - bq = 0$. Иными словами,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{p}{q} = \lambda,$$

и $b = \lambda c$, $a = \lambda^2 c$. Используя выведенные равенства, получаем цепочку преобразований

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{(\lambda^4 + \lambda^2 + 1)c^2}{(\lambda^2 + \lambda + 1)c} = (\lambda^2 - \lambda + 1)c = a - b + c,$$

а это, очевидно, целое число.

1г. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка P . Периметр треугольника равен $2p$. Докажите, что $p < AP + BP + CP < 2p$.

□ Рис. 5. Для начала запишем неравенства треугольника для ABP , ACP и BCP :

$$AP + BP > AB, \quad AP + CP > AC, \quad BP + CP > BC.$$

Сложив три неравенства, получим $p = \frac{AB + AC + BC}{2} < AP + BP + CP$.

Продлим отрезок CP до пересечения со стороной AB . Точку пересечения назовем D . Запишем неравенства треугольников для ACD и BPD :

$$CP + DP < AC + AD \quad \text{и} \quad BP < BD + PD.$$

Складывая эти неравенства, получаем $CP + BP < AC + AD + BD = AC + AB$. Аналогично доказываются неравенства $CP + AP < BC + BA$ и $AP + BP < CA + CB$. Складывая эти три неравенства, получаем $AP + BP + CP < AB + AC + BC = 2p$.

- 1с. Можно ли на доске 3×3 расставить числа $1, 2, \dots, 9$, каждое по одному разу, так, чтобы сумма любых двух соседних (по стороне) чисел была простым числом?

□ Ответ: нельзя.

Двойку в виде суммы двух чисел получить нельзя, поэтому соседями могут быть только числа разной четности. Поэтому в центре и по углам стоят нечетные числа, а в остальных четырех клетках — четные. Но если в центре стоит число x , то $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ и $x + 8$ должны быть простыми. В то же время, одно из чисел $x + 4$, $x + 6$ и $x + 8$ должно делиться на 3. Противоречие.

Второй тур

- 2а. На длинной полоске бумаги были выписаны числа $1, 2, \dots, n$ по порядку. Полоску разрезали на пять частей так, что каждая часть содержит несколько последовательных чисел (или, возможно, только одно). Средние значения чисел на полосках равны в некотором порядке 1234.5, 345, 128, 19 и 9.5. Найдите n .

□ Ответ: 2015.

Обозначим последние числа на каждой части полоски за a_1, a_2, a_3, a_4 и $a_5 = n$. Тогда средние значения равны $\frac{1+a_1}{2}, \frac{1+a_1+a_2}{2}, \frac{1+a_2+a_3}{2}, \frac{1+a_3+a_4}{2}$ и $\frac{1+a_4+a_5}{2}$, причем $\frac{1+a_1}{2} < \frac{1+a_1+a_2}{2} < \frac{1+a_2+a_3}{2} < \frac{1+a_3+a_4}{2} < \frac{1+a_4+a_5}{2}$. Последовательно находя a_i , получаем $a_1 = 18$, $a_2 = 19$, $a_3 = 236$, $a_4 = 453$ и $n = a_5 = 2015$.

- 2г. Дан остроугольный треугольник ABC с наибольшим углом B . Точка O — центр его описанной окружности. Серединные перпендикуляры к сторонам BC и BA пересекают сторону AC в точках X и Y соответственно. Биссектрисы углов BXA и BYC пересекают стороны BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что если отрезок DE параллелен AC , то BO перпендикулярен AC .

□ Рис. 6. Из параллельности DE и AC следует равенство $AD : BD = CE : BE$. В то же время, из свойств биссектрис $AD : BD = AX : BX$ и $CE : BE = CY : BY$, поэтому $AX : BX = CY : BY$. Точки X и Y лежат на серединных перпендикулярах к сторонам BC и BA , а значит, $BX = CX$ и $BY = AY$, тогда $AX : CX = CY : AY$. Получается, что $AY = CX$ и $BX = BY$. Из равнобедренности XBY следует, что $\angle AXB = \angle CYB$, поэтому треугольники AXB и CYB равны. Значит, исходный треугольник ABC равнобедренный, следовательно, точка O лежит на высоте.

- 2с. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_{30}$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, 30$. Для скольких таких

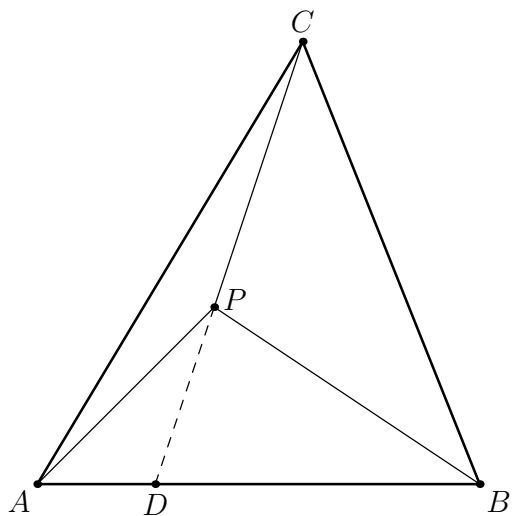


Рис. 5: к задаче 1g

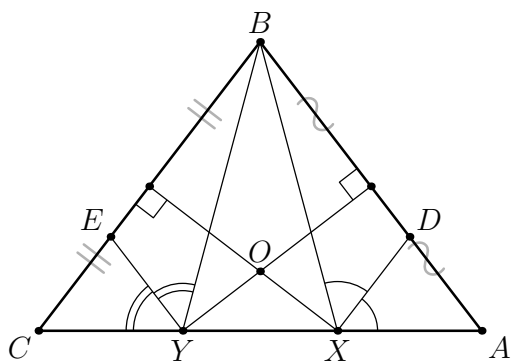


Рис. 6: к задаче 2g

перестановок верно равенство

$$\sum_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450?$$

□ Ответ: $(15!)^2$. После раскрытия модулей у нас получится выражение вида

$$\sum_{i=1}^{30} a_i - \sum_{i=1}^{30} b_i,$$

в котором каждое число от 1 до 30 задействовано ровно 2 раза. Максимальное значение это выражение принимает только в том случае, когда все числа от 16 до 30 содержатся среди a_i -ых, и это значение равно $2 \times (30 + 29 + \dots + 16 - 15 - \dots - 2 - 1) = 450$. Поэтому нам подходят ровно те перестановки, у которых на первых 15-ти местах стоят числа от 16 до 30, а их $(15!)^2$.

Третий тур

3а. Все клетки таблицы 2015×2015 заполнены нечетными целыми числами. Пусть Z_i — сумма чисел в i -й строке, $1 \leq i \leq 2015$, а S_j — сумма чисел в j -м столбце, $1 \leq j \leq 2015$. Обозначим произведение всех Z_i за A , а произведение всех S_j за B . Докажите, что $A + B \neq 0$.

□ Обозначим за x и y количество чисел Z_i вида $4k + 1$ и $4k + 3$, за z и t — количество чисел S_j вида $4k + 1$ и $4k + 3$. Сумма всех чисел таблицы сравнима с $x + 3y$ и с $z + 3t$ по модулю 4, то есть, $x + 3y \equiv z + 3t \pmod{4}$. Так как $x + y = 2015 = z + t$, то $y \equiv t \pmod{2}$. Учитывая, что $A \equiv (-1)^y \pmod{4}$ и $B \equiv (-1)^t \pmod{4}$, получаем $A + B \equiv 2 \pmod{4}$, поэтому нулем быть сумма не может.

3г. Дан остроугольный неравносторонний треугольник ABC , и N — центр окружности, проходящей через основания его высот. Касательные к описанной окружности ABC , проведенные в точках B и C , пересекаются в точке D . Докажите, что A , D и N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle BAC = 45^\circ$.

□ Рис. 7. Заметим, что точка N — центр окружности Эйлера треугольника ABC , а значит, N лежит на отрезке OH и делит его пополам: $HN = NO$. Заметим также, что $OD \perp BC$, а значит, $OD \parallel AH$. Вспомним кроме того, что $AH = 2OM$, где за M мы обозначили середину BC .

Теперь, если точки A , N и D лежат на одной прямой, то $\triangle AHN = \triangle DON$. Так как $OD = AH = 2OM$, то диагонали четырехугольника $BDCO$ делятся точкой пересечения пополам. Следовательно, $BDCO$ — параллелограмм. Из того, что его углы B и C равны по 90° , следует, что это прямоугольник. Значит, $\angle BOC = 90^\circ$, а $\angle BAC = \angle BOC/2 = 45^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на ту же дугу. Что и требовалось.

Обратное утверждение доказывается так же — все переходы были равносильны.

$$\begin{aligned} \angle BAC = 45^\circ &\Rightarrow \angle BOC = 90^\circ \Rightarrow BDCO \text{ — прямоугольник} \Rightarrow \\ &\Rightarrow OM = MD = AH/2 \Rightarrow AH = OD \Rightarrow \triangle AHN = \triangle DON \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{точки } A, N, D \text{ лежат на одной прямой.} \end{aligned}$$

- 3с. В школе учатся n школьников, и некоторые из них ходят на кружки. Каждый школьник может ходить на любое количество кружков, но на любой кружок ходит хотя бы два школьника. Известно, что если какие-то два школьника оба ходят на какие-то два кружка, то на эти кружки ходит различное количество школьников. Докажите, что количество кружков не превосходит $(n - 1)^2$.

□ Рассмотрим все кружки, на которые ходят ровно k человек. Обозначим их количество за a_k . Каждая пара школьников может посещать только один из этих кружков, а каждый кружок посещает C_k^2 пар школьников, поэтому выполнено неравенство

$$a_k \cdot C_k^2 \leq C_n^2.$$

Оценим общее количество кружков.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n a_k &\leq C_n^2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{C_k^2} = C_n^2 \sum_{k=2}^n \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} \right) = \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) = (n-1)^2. \end{aligned}$$

Четвертый тур

- 4а. Коэффициенты a , b и c многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ являются различными целыми ненулевыми числами. Известно, что $P(a) = a^3$ и $P(b) = b^3$. Найдите a , b и c .

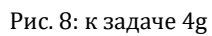
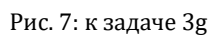
□ Ответ: $a = -2$, $b = 4$, $c = 16$.

Условия $P(a) = a^3$ и $P(b) = b^3$ дают нам равенства $a^3 + ab + c = 0$ и $ab^2 + b^2 + c = 0$. Вычитая одно из другого, получаем $(a+1)b^2 - ab - a^3 = 0$. Это выражение раскладывается на множители $(a+1)b^2 - ab - a^3 = (b-a)((a+1)b + a^2) = 0$. Так как a и b различны, то $(a+1)b + a^2 = 0$. Если $a = -1$, то и $b = -1$, что противоречит условию. Значит, $b = \frac{-a^2}{a+1}$. Число b — целое, поэтому a^2 должно делиться на $a+1$. В то же время, числа a^2 и $a+1$ взаимно просты. Поэтому нужно рассмотреть случаи $a+1 = 1$ и $a+1 = -1$. Первый случай не подходит, так как $a \neq 0$, второй дает решение $a = -2$, $b = 4$, $c = 16$. Легко проверить, что эти числа удовлетворяют всем условиям.

- 4г. Дан остроугольный треугольник ABC , причем $AB > AC$ и $\angle A = 60^\circ$. Пусть O — центр его описанной окружности, а H — точка пересечения высот. Прямая OH пересекает AB в точке P и AC в точке Q . Найдите отношение $PO : HQ$.

□ Ответ: $PO : HQ = 1 : 1$.

Пусть точки B_1 и C_1 — основания высот, проведенных из вершин B и C соответственно; точки B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно (рис. 8). Как мы знаем, $CH = 2OC_2$. Но в прямоугольном треугольнике CHB_1 угол H равен 60° , следовательно, $CH = 2HB_1$. Значит, $HB_1 = OC_2$. Аналогично проверяется $HC_1 = OB_2$. Отсюда легко следует, что четырехугольники AC_1HB_1 и AC_2OB_2 равны и симметричны друг другу относительно биссектрисы угла A . Значит, симметричны точки O и H . Теперь очевидно, что треугольник APQ равносторонний (так как биссектриса перпендикулярна основанию), и отрезки QH и OP равны.



- 4с. В таблице 20×15 в клетках расставляются монеты. Две монеты называются «соседями», если они стоят в одном столбце или в одной строке, и между ними нет других монет. Какое наибольшее количество монет можно расставить в таблице так, чтобы у каждой было не больше двух «соседей»?

□ Ответ: 35.

Оценка. Обозначим за $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ количества монет в строках $1, 2, \dots, 20$, а за $y_1, y_2, \dots, y_{15}$ – количества монет в столбцах $1, 2, \dots, 15$. Тогда общее количество монет C равно $x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = y_1 + y_2 + \dots + y_{15}$. Количество «соседств» N можно оценить снизу суммой $(2x_1 - 2) + (2x_2 - 2) + \dots + (2x_{20} - 2) + (2y_1 - 2) + (2y_2 - 2) + \dots + (2y_{15} - 2) = 4C - 70$. Так как у каждой монеты не более двух соседей, то $2C \geq N$, а значит, $2C \geq 4C - 70$, то есть $C \leq 35$.

Другое обоснование оценки. Заметим, что из каждой клетки с монетой можно увидеть не менее двух концов строк или столбцов («увидеть» значит, что эти концы не загорожены другими монетами). Всего таких концов $2 \cdot 20 + 2 \cdot 15 = 70$. Значит, монет не более 35.

Пример. 35 монет можно корректно расположить в таблице, полностью заполнив нижнюю строчку и левый столбец, и еще одну монетку положив в правый верхний угол (рис. 9).