Принцип включения-исключения

В.В. Вавилов, профессор СУНЦ МГУ
М.Е. Колоскова, ассистент СУНЦ МГУ

Наряду с методом математической индукции, принципом Дирихле, принцип (формула) включения - исключения является важнейшим математическим инструментом. Особенно, в комбинаторике, когда, зная число элементов в каждом из конечных данных множеств, нужно найти число элементов другого множества, которое составлено из данных множеств при помощи некоторых операций (объединений, пересечений и т.д.).

Два пересекающихся круга K_1 и K_2 на рис. 1 дают наглядное представление о множестве K_{12}, состоящего из их общих точек; при этом пишут $K_{12} = K_1 \cap K_2$. Множество, которое состоит из всех тех элементов, которые входят либо во множество K_1, либо во множество K_2, называют объединением этих множеств и обозначают $K_1 \cup K_2$.

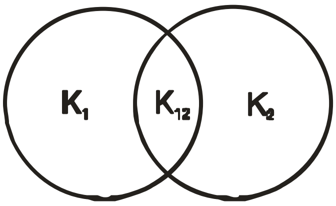

Рис.1

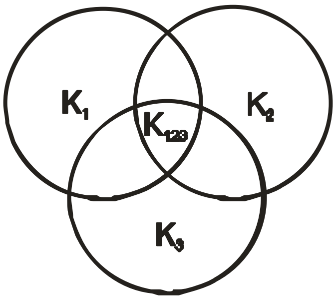

Рис.2

Если таких кругов три – K_1, K_2, K_3, то рис.2 хорошо иллюстрирует возможные подмножества, связанные с тремя данными множествами: K_{12}, K_{13}, K_{23} , K_{123} ; при этом, $K_{12} = K_1 \cap K_2$, $K_{13} = K_1 \cap K_3$, $K_{23} = K_2 \cap K_3$, $K_{123} = K_1 \cap K_2 \cap K_3$. Множество K_{123} состоит из всех тех элементов, которые входят во все три множества. Всюду в дальнейшем мы будем придерживаться именно такой схемы обозначений для пересечений произвольных множеств.

Если множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов, то два круга на рис.1 убеждают в том (а, по - существу, доказывают!), что

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_{12}), \qquad (1)$$

где n(X) обозначает число элементов множества X.

Эта одна из важных формул в комбинаторике; ее называют *правилом сложения.* С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа конечных множеств. Например, для трех множеств имеем (обозначения вида A_{ij} и A_{123} носят описанный выше характер)

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= n(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) = \\ &= n(A_1) + n(A_2 \cup A_3) - n((A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = \\ &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{23}) - n(A_{12} \cup A_{13}) = \\ &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{23}) - n(A_{12}) - n(A_{13}) + n(A_{12} \cap A_{13}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{12}) - n(A_{13}) - n(A_{23}) + n(A_{123}).$$

Здесь мы применили два раза правило сложения для двух множеств и использовали то, что $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = A_{12} \cup A_{13}$. Проверьте это свойство самостоятельно.

Полученная формула, как и формула (1), являются частными случаями общего *принципа (формулы) включений – исключений* (см. также задачу 11 в конце статьи).

Задача 1. (Л. Кэрролл). В ожесточенной драке более 70% участников повредили глаз, 75% - ухо, 80% - руку, 85% - ногу.

Каково наименьшее количество повредивших глаз, ухо, руку и ногу?

Эта задача придумана известным детским писателем и математиком *Льюисом Кэрроллом,* автором книг «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье», давно уже ставших достоянием мировой культуры.

Решение. Здесь практически повторяются предыдущие рассуждения с последовательным применением правило сложения, но «наоборот». Обозначим через A множество всех участников драки, а через A_1, A_2, A_3, A_4 – множества участников, повредивших соответственно глаз, ухо, руку и ногу.

Тогда из условия задачи и формулы (1) для числа участников драки, повредивших глаз и ухо получаем:

$$n(A_{12}) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cup A_2) \geq \frac{70}{100} n(A) + \frac{75}{100} n(A) - n(A) = \frac{45}{100} n(A).$$

Аналогично, для числа повредивших глаз, ухо и руку

$$n(A_{123}) = n(A_{12}) + n(A_3) - n(A_{12} \cup A_3) \geq$$
$$\geq \frac{45}{100} n(A) + \frac{80}{100} n(A) - n(A) = \frac{25}{100} n(A).$$

Точно также оценивается число драчунов, которым совсем не повезло и которые повредили глаз, ухо, руку и ногу:

$$n(A_{1234}) = n(A_{123}) + n(A_4) - n(A_{123} \cup A_4) \geq$$
$$\geq \frac{25}{100} n(A) + \frac{85}{100} n(A) - n(A) = \frac{10}{100} n(A).$$

Итак, полных неудачников драки - не менее 10%.

Задача 2. *На столе, площади 1, лежат три журнала, площади которых A_1, A_2, A_3 не меньше 1/2. Какую наибольшую площадь пересечения могут иметь два журнала?*

Решение. Ясно, что та площадь стола, которую все три журнала покрывают, равна (см. рис.2)

$$\Pi = A_1 + A_2 + A_3 - A_{12} - A_{13} - A_{23} + A_{123},$$

где через A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{123} обозначены уже площади пересечений двух и трех журналов. Так как $\Pi \leq 1$, то отсюда следует, что

$$A_{12} + A_{13} + A_{23} \geq (\frac{3}{2} - 1) + A_{123} \geq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, если, например, A_{12} - наибольшая площадь пересечения двух журналов, то $3A_{12} \geq 1/2$. Следовательно, $A_{12} \geq 1/6$. Другими словами, в условиях задачи, имеются два журнала, которые пересекаются по площади не меньше 1/6.

Задача 3. На экзамене по математике были предложены три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по математическому анализу. Из 1000 участников экзамена задачу по алгебре решили 800, по геометрии – 700, по анализу – 600. При этом, задачи по алгебре и геометрии решило 600 человек, по алгебре и анализу – 500, по геометрии и анализу- 400. А 300 экзаменующихся решили все задачи. Сколько человек не решили ни одной задачи?

Решение. Пусть A_1 – множество экзаменующихся, решивших задачу по алгебре, A_2 – по геометрии, A_3 – по математическому анализу. Тогда из принципа включения – исключения для числа школьников из множества $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$, которое включает в себя всех тех, кто хоть что-то решил, имеем равенство

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{12}) - n(A_{13}) - n(A_{23}) + n(A_{123}) =$$
$$800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900.$$

Следовательно, число экзаменующихся, которые не решили ни одной задачи равно 100.

Задача 4. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B и C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

Решение. Пусть n(a) – количество треугольников, у которых одна из сторон параллельна BC исходного треугольника. Аналогично, введем обозначения количеств n(b), n(c), n(a,b), n(b,c), n(a,c) и n(a,b,c). Тогда общее число треугольников равно 6^3 и (Почему?)

$$n(a) = n(b) = n(c) = 6^2,\ n(a,b) = n(b,c) = n(a,c) = 6,\ n(a,b,c) = 1.$$

Применяя теперь формулу включения-исключения для трех множеств, получаем, что искомое число треугольников равно

$$6^3 - 3\cdot 6^2 + 3\cdot 6 - 1 = (6-1)^3 = 125.$$

Решенные задачи позволяют сформулировать *принцип включения – исключения в общем виде*. Пусть имеется n объектов и $n(\alpha)$ из них обладают некоторым свойством α; подобным же образом через $n(\beta)$, $n(\gamma)$ обозначим, соответственно, число тех объектов, которые обладают свойствами $\beta,\gamma,...$ Если через $n(\alpha,\beta)$, $n(\alpha,\gamma)$, $n(\beta,\gamma)$, $n(\alpha,\beta,\gamma)$ обозначить число объектов, которые обладают теми свойствами, которые указаны в скобках, то число объектов, которые *не обладают ни одним из свойств α, β, γ, ...* равно

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) + n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\gamma) + \ldots$$

Этот общий прием (формула) имеет место, конечно, для любого конечного числа свойств объектов. При этом, если свойств у объектов много, то число членов в написанном выражении, естественно, возрастает. Например, для числа объектов, не обладающих четырьмя свойствами справедлива формула

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) - n(\delta)$$
$$+n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\alpha,\delta) + n(\beta,\gamma) + n(\beta,\delta) + n(\gamma,\delta)$$
$$-n(\alpha,\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\delta) - n(\alpha,\gamma,\delta) - n(\beta,\gamma,\delta)$$
$$+ n(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

Задача 5. Напишите все члены в формуле включений-исключений для n объектов и пяти свойств. Докажите эту формулу.

Задача 6. Сколько чисел между 1 и 33000 включительно: а) не делятся на 3; б) не делятся ни на 3, ни на 5; в) не делятся ни на одно из чисел 3,5,11?

Решение. Представим его в виде, пригодном в качестве образца для доказательства общего принципа включения-исключения (здесь мы имеем случай трех свойств).

Так как среди трех последовательных чисел ровно одно делится на три, то среди всех чисел ровно 33000/3 = 11000 делится на три и, тем самым,

$$33000 - 11000 = 22000$$

чисел не делятся на три.

Число чисел делящихся на 5 равно 33000/5 = 6600. Однако, число

$$33000 - 11000 - 6600 = 15400$$

не является числом чисел, которые не делятся ни на 3 ни на 5, так как в этой разности мы исключили два раза числа 15, 30, 45,…, которые делятся как на 3, так и на 5. Поэтому к числу 15400 нужно добавить число чисел которые делятся и на 3 и на 5 , т.е. на 15. Их число равно 33000/15 = 2200. Таким образом, число чисел, которое не делятся ни на 3 ни на 5 равно

$$33000 - 11000 - 6600 + 2200 = 17600.$$

Чтобы сосчитать число чисел из п. в) вычтем последовательно из 33000 число всех чисел, делящихся на 3; затем число чисел, делящихся на 5 и, наконец, число чисел, делящихся на 11. Получаем

$$33000 - 22000 - 6600 - 3000.$$

Однако, число чисел делящихся одновременно на 3 и 5 мы вычли дважды; дважды мы вычли число чисел, делящихся одновременно на 5 и 11, а также число чисел, делящихся одновременно на 3 и 11 (таких чисел, соответственно, 2200, 33000/55 = 600 и 33000/33 =1000). Поэтому, если добавить эти числа, то получим число

$$33000 - 11000 - 6600 - 3000 + 2200 + 600 + 1000,$$

которое все *еще не является искомым ответом*. Это следует из того, что числа 165, 330, 495,…, которые делятся одновременно на 3, 5 и 11 мы сначала учли в числе 33000, затем в каждом из чисел 22000, 6600, 3000 и, кроме того, они фигурируют и в числах 2200, 600, 1000. Следовательно, мы сначала учли один раз числа, делящиеся на 3.5.11 = 165 (а таких чисел 33000/165 = 200), затем три раза вычли число таких чисел, а затем три раза добавили число таких чисел. Чтобы теперь получить ответ, нужно отнять от последнего результата число 200; имеем:

$$33000 - 11000 - 6600 - 3000 + 2200 + 600 + 1000 - 200 = 16000.$$

Итак, среди натуральных чисел между 1 и 33000 имеется 16000 чисел, которые не делятся ни на одно из чисел 3,5,11.

Решение предыдущей задачи наталкивает на следующее обобщение. Пусть x – некоторое действительное положительное число, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые числа. Если $N(x; p_1, p_2, \ldots, p_k)$ обозначает количество целых положительных чисел, не превосходящих x и не делящихся ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то по формуле включений-исключений получаем:

$$N(x; p_1, p_2, \ldots, p_k) = [x] - \left[\frac{x}{p_1}\right] - \ldots - \left[\frac{x}{p_k}\right] +$$

$$+ \left[\frac{x}{p_1 p_2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p_{k-1} p_k}\right] - \left(\left[\frac{x}{p_1 p_2 p_3}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p_{k-2} p_{k-1} p_k}\right]\right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \left[\frac{x}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right].$$

Здесь участвуют все сочетания по два из к чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, все сочетания по три из тех же простых чисел и т.д.; [a] обозначает целую часть числа a.

Эта формула (а точнее, просто запись самого принципа включения-исключения) позволяет дать довольно быстрый способ вычисления значений функции Эйлера, играющей важную роль в теории чисел. Под *функцией Эйлера* φ(n) подразумевается количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n; при этом предполагается, что φ(1) =1. Так, например, φ(10) = 4, так как в ряду чисел 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 взаимно простыми с числом 10 будут четыре числа: 1,3, 7,9. С другой стороны, φ(11) = 10, так как число 11 простое и все числа меньшие 11 будут взаимно просты с 11. Ясно, что вообще φ(p) = p-1 для любого простого числа p, p ≥ 2.

Теорема (Л. Эйлер). Если n = $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ - каноническое разложение числа n > 1 на простые множители, то

$$\varphi(n) = n\ (1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1-\frac{1}{p_k}).$$

Доказательство. Ясно, что φ(n) = N(x; p_1, p_2, … , p_k). Поэтому, по предыдущей формуле получаем:

$$\varphi(n) = [n] - \left[\frac{n}{p_1}\right] - \dots - \left[\frac{n}{p_k}\right] + \left[\frac{n}{p_1 p_2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p_{k-1} p_k}\right] - \dots + (-1)^k \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right].$$

Все числа в квадратных скобках являются целыми и значит

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \dots - \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_1 p_2} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} - \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}.$$

Нетрудно проверить (Сделайте это!), что выражение справа в предыдущей формуле равно

$$n\,(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1-\frac{1}{p_k}),$$

что и доказывает теорему.

Из теоремы Эйлера, например, для числа 5256 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 73$ имеем:

$$\varphi(5256) = 5256\ (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{73}) = 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 72 = 1728.$$

Задача 7. Пять человек подбросили в воздух свои шляпы. Шляпы вернулись этим же людям (по одной – каждому), но в произвольном порядке. Сколько существует таких возможностей, чтобы никто из них не получил своей шляпы обратно?

Решение. Присвоим номера каждому человеку и его шляпе: 1.2,3,4,5. Тогда распределение шляп между людьми (после падения) можно описать при помощи таблицы P

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \end{matrix},$$

в которой в первой строке номера соответствуют людям, а во второй стоят номера тех шляп, которые им вновь достались (такие таблицы называют перестановками элементов множества {1,2,3,4,5}). Всего таких таблиц можно составить 120 = 5! = 5·4·3·2·1. Это следует из простой формулы (проверьте ее!): $P_s = s\cdot P_{s-1}$, s > 1; здесь P_s и P_{s-1} обозначают число перестановок элементов множеств {1,2,3,…,s} и {1,2,3,…,s-1}.

Пусть A_i - множество таких перестановок элементов множества {1,2,3,4,5}, у которых k_i = i, i = 1,2,3,4,5. Объединение всех этих пяти множеств состоит из перестановок, которые соответствуют ситуациям, когда кто-то из подбрасывающих (быть может и не один человек) получил назад именно свою шляпу. В каждом из этих пяти множеств по 24 = (5-1)! перестановок.

Число элементов в каждом из десяти множеств A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{34}, A_{35}, A_{45} (у двух указанных человек – свои шляпы) равно 6 = (5-2)!.

Десять множеств A_{123}, A_{124}, A_{125}, A_{134}, A_{135}, A_{145}, A_{234}, A_{235}, A_{245}, A_{345}, в каждом из которых по две перестановки, отвечают ситуациям, когда три человека (отвечающим номерам в индексах обозначений множеств) получили свои шляпы.

Наконец, каждое из пяти одноэлементных множеств A_{1234}, A_{1235}, A_{1245}, A_{1345}, A_{2345} отвечает ситуации, когда четыре указанных человека получили свои шляпы, а множество A_{12345} состоит только из одной (тождественной) перестановки.

Теперь применим принцип включения-исключения для пяти множеств. Тогда для числа возможностей, когда никто не получил своей шляпы, получаем

$$120 - 5\cdot 24 + 10\cdot 6 - 10\cdot 2 + 5\cdot 1 – 1 = 44.$$

Замечание. Интересно, что вероятность того, что каждый из бросавших шляпу, получит чужую шляпу практически мало отличаются от числа бросавших, если их больше пяти. Под вероятностью понимается отношение числа возможностей распределения шляп указанным способом к числу всех возможностей. Это легко следует из принципа включения-исключения в общем случае.

Пусть A_k обозначает множество перестановок f множества {1,2,3,…,n}, для которых f(k) = k. Тогда из подсчета числа перестановок с нужными свойствами и формулы включения-исключения следует (см. решение задачи 8), что

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} C_n^s (n-s)! = n! \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Поэтому число возможностей, когда никто не получит своей шляпы равно

$$n! \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Искомая вероятность равна

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

Это число мало отличается от числа 1/е даже при небольших n; поэтому вероятность практически одинакова, например, для десяти человек или тысячи человек.

Задача 8. В многоугольнике единичной площади расположены 5 фигур и площадь каждой из них больше или равна 1/2. Докажите, что найдутся две фигуры, площадь пересечения которых не меньше 3/20.

Решение. Пусть A и A_k обозначают данные многоугольник и пять фигур (k = 1,2,3,3,4,5), а также и их площади (другими словами, одними буквами обозначены и множества и числа – их площади; их использование в том или ином качестве будет ясно из контекста). Заметим, что

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \geq 5\cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 1$$

и поэтому некоторые из множеств A_k попарно пересекаются. Кроме того, ясно, что

$$A – (A_1+A_2+A_3+A_4+A_5) +$$
$$A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{15} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{34} + A_{35} + A_{45} \geq 0.$$

Действительно, например, общая часть A_{123} пересекающихся фигур A_1 и A_2 участвует в этой формуле только в А. Так как она со знаком «минус» входит в слагаемые A_1, A_2, A_3 и с обратным знаком «плюс» - в слагаемые A_{12}, A_{13}, A_{23}.

Отсюда получаем, что

$$A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{15} + A_{23} + A_{24} + A_{25} + A_{34} + A_{35} + A_{45} \geq 5\cdot\frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, хотя бы одно из десяти чисел, фигурирующих в левой части этого неравенства, будет не меньше чем $\frac{3}{2} : 10 = \frac{3}{20}$.

Замечание. Задача 8 – это облегченный вариант широко известной задачи «О заплатках на кафтане», о которой можно прочитать в книге: Д.О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И.М. Яглом, Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. -М.: Наука, 1974. (См. также статью И.М. Яглома в журнале «Квант», №2 за 1974 год). Оригинальная задача формулируется так:

На кафтане площади 1 имеются 5 заплат. Докажите, что

а) если площадь каждой заплаты не меньше 1/2, то найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/5;

б) в условиях задачи а) найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/20;

в) если площадь общей части любых двух заплат не меньше 1/4, то найдутся три заплаты, площадь общей части которых не меньше 3/ 40.

В книге и статье рассматриваются также обобщения этой задачи в различных направлениях. Эта тематика хороша для работы кружков и для подготовки докладов на научные конференции школьников.

Упражнения и задачи

1. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5; все три языка знают 3 студентов. Сколько студентов не знают ни одного из этих трех языков?

Ответ: 20

2. В классе имеется a_1 учеников, получивших в течение года хотя бы одну двойку, a_2 учеников, получивших не менее двух двоек, и т.д., $a_к$ учеников, получивших не менее k двоек. Сколько учеников в этом классе? (Предполагается, что ни у кого нет больше k двоек).

Ответ: $a_1 + a_2 + \ldots + a_к$.

3. Во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и носороги, нет жирафов. Во всех зоопарках, где есть носороги и нет жирафов, есть гиппопотамы. Наконец, во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и жирафы, есть и носороги. Может ли существовать такой зоопарк, в котором есть гиппопотамы, но нет жирафов, ни носорогов?

Ответ: Да, может

4. Сколько существует целых чисел от 1 до 16500, которые

а) не делятся на 5;

б) не делятся ни на 5, ни на 3

в) не делятся ни на 5, ни на 3, ни на 11?

Ответ: а)13200; б) 8800; в) 8000.

5. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

Ответ: 998910. **Указание**. Множество четвертых степеней включается в множество полных квадратов. Пусть α - это свойство числа быть квадратом, а β - быть кубом числа. Тогда из принципа включений-исключений для искомого количества чисел имеем:

$1000000 - n(\alpha) - n(\beta) + n(\alpha,\beta) = 1000000 - 1000 - 100 + 10 = 998910.$

6. а). Используя выше приведенные обозначения и рассматривая 5 свойств α, β, γ, δ, ε, напишите формулу для числа объектов, которые имеют три свойства α, β и γ, но ни одно из свойств δ, ε.

Ответ: $n(\alpha,\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\gamma,\delta) - n(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon) + n(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$.

б) Рассмотрим множество объектов и четыре свойства α, β, γ, δ. Напишите формулу для числа объектов, которые имеют свойство β, но не имеют ни одного из свойств α, γ, δ.

Ответ:$n(\beta)-n(\beta,\alpha)-n(\beta,\gamma)-n(\beta,\delta)+n(\beta,\alpha,\gamma)+n(\beta,\alpha,\delta)+ n(\beta,\gamma,\delta)-n(\beta,\alpha,\gamma,\delta)$.

7. Дано n объектов, которые могут обладать свойствами α, β и γ. Докажите, что

$$3n + n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\beta,\gamma) \geq 2n(\alpha) + 2n(\beta) + 2\, n(\gamma).$$

Указание. Установите что имеет место неравенство $n + n(\alpha,\beta) \geq n(\alpha) + n(\beta)$ и еще два, ему аналогичных. Затем сложите все такие неравенства.

8. В комнате площадью 6м^2 постелили 3 ковра произвольной формы площадью 3м^2 каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1м^2.

Указание: Используйте неравенство $A_{12} + A_{13} + A_{23} \geq A_1 + A_2 + A_3 - A$.

9. (Москва, 1968) а) В квадрате 2×2 размещены 7 многоугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Доказать, что найдутся два многоугольника, площадь пересечения которых больше, чем 1\7.

б) В прямоугольнике площади 5 размещены 9 многоугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Доказать, что найдутся два многоугольника, площадь пересечения которых не меньше, чем 1/9.

Указание: Решение этих задач повторяет рассуждение из предыдущей задачи 8.

10. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один ученик не сел на своё место?

Указание. Решение аналогично решению задачи 7 из основного текста статьи.

11. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ – конечные множество. Докажите следующую *общую формулу включений-исключений*

$$n(A) = \sum n(A_i) - \sum n(A_{ij}) + \sum n(A_{ijk}) - \ldots + (-1)^{k-1} n(A_{12\ldots k}),$$

где n(X) обозначает число элементов множества X.

Сколько слагаемых в каждой сумме, написанной в правой части формулы? Сколько всего слагаемых во всех этих суммах?

Ответ: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ слагаемых в k-ой сумме. Общее число слагаемых равно $2^{n(A)} - 1$.

12. Обозначим через n_p $(1 \leq p \leq k-1)$ сумму, которая получится, если правую часть формулы включений-исключений из задачи 11 оборвать перед p – ой сменой знака. Так, например,

$$n_1 = \sum n(A_i),\ n_2 = \sum n(A_i) - \sum n(A_{ij}),\ n_3 = \sum n(A_i) - \sum n(A_{ij}) + \sum n(A_{ijk}).$$

Докажите, что $n(A) \geq n_p$ при четных p и $n_p \geq n(A)$ при нечетных p.