НАЧАЛА КОМБИНАТОРИКИ

составила Ю.В. Курышова (jk@braingames.ru)

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика или *комбинаторный анализ* (от поднелат. *combino* — соединяю) — это раздел математики, изучающий различные комбинации (конечных) дискретных множеств и отношения на них.

Зачатки комбинаторики появились в XVI веке при изучении проблем азартных игр, вместе с комбинаторикой начала развиваться и теория вероятностей.

Мы коснёмся здесь лишь *перечислительной* комбинаторики. Нас будет интересовать ответ на вопрос: *сколько* комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов?

Для небольших множеств можно выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их. **Пример**: подсчитайте сколькими способами Пятачок, Винипух и Кролик могут нести по одному разноцветному шарику? Ответ: 6.

Однако с ростом числа элементов решение задачи ручным подсчётом становится трудоёмким. Были выявлены комбинации, встречающиеся чаще других, они получили особые названия: размещения, сочетания, перестановки[1].

[1] К комбинациям относят также латинские квадраты. Здесь их не касаемся.

1. Два основных комбинаторных принципа

В дальнейшем мы будем пользоваться двумя основными принципами: правилом и суммы и правилом произведения.

Правило суммы. Пусть объект а можно выбрать m способами, a объект b можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a, либо b» можно сделать $m+n$ способами.

В правиле суммы нашёл отражение тот факт, что число элементов объединения попарно непересекающихся множеств равно сумме числа элементов в каждом из множеств.

Правило суммы в терминах множеств: пусть множество A состоит из m элементов, а множество B — из n элементов, причём множества A и B не пересекаются. Тогда множество $A \cup B$ состоит из $m+n$ элементов.

Правило суммы можно распространить на любое число объектов (множеств).

Общее правило суммы: пусть объект каждый из объектов a_i можно выбрать n_i способами, $(i = 1, \dots, N)$ причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a_1, либо a_2, …, либо a_N» можно осуществить $n_1 + n_2 + .. + n_N$ способами.

Общее правило суммы в терминах множеств: пусть дано N попарно непересекающихся множеств A_i $(i = 1, \dots, N)$ и пусть во множестве A_i содержится n_i элементов. Тогда множество $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N =: \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ состоит из $n_1 + n_2 + \ldots + n_N =: \sum_{i=1}^{N} n_i$ элементов.

Пример. В 10Б классе 24 ученика, в 10В — 26 учеников. Сколькими способами преподаватель может перед лекцией послать 1 ученика вымыть тряпку? Ответ 24+26=50.

Пример. Вася приглашает Катю на футбол, а Катя приглашает Васю, на одну из 5 театральных постановок. Сколькими способами они могут провести вечер. Ответ: 1+5=6.

Правило произведения. Пусть объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (a, b) можно выбрать mn способами; иными словами, существует mn различных упорядоченных пар (a, b).

Правило произведения можно обобщить на произвольное число объектов (множеств): пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, после чего объект a_2 можно выбрать n_2 способами, и т.д., после чего объект a_N

можно выбрать n_N способами. Тогда набор $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_N$ способами. То есть, существует $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_N$ штук наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$.

Пример. Обед в столовой из четырёх блюд: 3 вида супа, 4 вида второго блюда, 5 салатов и 4 напитка. Сколькими способами можно пообедать из четырёх видов блюд? Ответ: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 240$.

2. Размещения (без повторений)

Рассмотрим **задачу**. В 10Б классе учатся 24 человека. Сколькими способами можно выбрать из них а) старосту и его заместителя? б) старосту, заместителя и помощника воспитателя?

Решение. Старостой может быть любой из 24 человек, заместителем — любой из 23 оставшихся. Значит, по правилу произведения старосту и его заместителя можно выбрать 24·23=552 способами. б) Старосту и его заместителя мы уже выбрали, после чего, для выбора помощника воспитателя остаётся 22 способа, то есть по правилу произведения на три должности можно выбрать 24·23·22=12144 способами.

Решая эту задачу, мы фактически нашли число способов выбрать упорядоченную пару и упорядоченную тройку из 24-элементного множества. Дадим общее определение такой комбинации.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k $(k = \overline{1, n})$ различных элементов данного множества, называется *размещением* из n элементов по k элементов (или просто размещением из n по k). *Число размещений* из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (от фр. «Arrangement» — приведение в порядок, расстановка, размещение). Обратите внимание, что A_n^k обозначают именно *число* размещений, а не сами упорядоченные множества.

Выведем формулу для числа размещений.

Рассуждаем так же, как и в задаче про 10Б. Нужно выбрать из n элементов данного множества упорядоченный набор, состоящий из k элементов. Для выбора первого элемента размещения имеется n способов, для выбора второго элемента имеется $n - 1$ способ, для выбора третьего элемента имеется $n - 2$ способа и т. д. Для выбора последнего, k-го элемента размещения имеется $n - k + 1$ способ. Значит, по правилу произведения число размещений из n по k можно посчитать по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad (1)$$

Этой формулой удобнее всего пользоваться при числовых расчётах, но запомнить, возможно, проще другую. Разделим и домножим на $(n-k)!$ правую часть равенства (1), получим

$$A_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot...\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ то есть}^2$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Формулу (1) можно доказать индукцией по k (упражнение).

Заметим, что правая часть формулы (2) имеет смысл и при $k=0$, она равна 1. В будущем нам пригодится такая формализация, при этом мы будем считать, что размещение из n элементов по нулю — пустое множество — можно осуществить 1 способом, ничего не взяв.

Пример. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если на выбор есть 5 различных цветов? Тот же вопрос, если одна полоса белая?

Решение. Так как порядок цветов важен (например, флаги России и Нидерландов отличаются только порядком цветов), то речь идет о размещениях из 5 по 3, их число $A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$. Если же одна полоса заведомо белая, то она может занять одно из 3 мест на флаге. Две другие могут быть выбраны как упорядоченная пара из 4 цветов, это можно сделать $A_4^2 = 4\cdot 3 = 12$ способами, а три полосы (то есть весь флаг) по правилу произведения можно составить $12\cdot 3 = 36$ способами.

Пример. Конкурс красоты. Сколькими способами из 50 девушек можно выбрать королеву красоты и вице-королеву? **Ответ**: $A_{50}^2 = 50\cdot 49 = 2450$.

3. Перестановки (без повторений)

Это частный случай размещений. При составлении размещений из n элементов по k мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но, если брать расстановки, в которые входят *все* n элементов, то они могут отличаться лишь порядком, входящих в них элементов. Такие расстановки называются *перестановками* из n элементов. Их число обозначается P_n (от фр. permutation — перемещение, обмен, перестановка).

[2] Напомним, что $n! = 1\cdot ...\cdot n$; 1!=1; 0!=1 — значение введено по определению, чтобы сохранить свойство $n! = n(n-1)!$ при $n=1$.

Определение. *Перестановка* из n элементов данного множества — это любое упорядочивание данного множества или, это размещение из n элементов по n.

Формула для числа[3] перестановок из n

$$P_n = n! \quad (3)$$

есть простое следствие формулы (2) при $k = n$, но её также можно вывести непосредственно, используя правило умножения (упражнение).

Пример. Детскую задача про Виннипуха, Кролика и Пяточка, несущих разноцветные шарики, можно было бы решить в терминах перестановок. Решение. Зафиксируем персонажей (или разноцветные шарики), сколькими способами между ними можно распределить шарики (персонажей)? Ответ $P_3 = 3! = 6$.

Пример. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь? Ответ: $10! = 3628800$.

Логика рассуждений будет ровно такой же, если число шариков и персонажей равно n.

Чуть менее простой **пример**. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, что никакие два лица одного пола не сидели рядом? Решение. «Вчистую» применить перестановки не получается, но если понять, что места для мужчин и женщин можно выбрать двумя способами, то дальше ясно, что женщин по их местам можно разместить числом способов $P_5 = 5!$, равно как и мужчин по их местам можно разместить числом способов $P_5 = 5!$. Далее нужно применить правило произведения: $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28800$ способов.

4. Сочетания (без повторений)

Пример. Рассмотрим снова задачу про 10Б, только в этот раз будем думать, сколькими способами можно выбрать из класса двух дежурных в столовую?

Решение. На первый взгляд, кажется, что рассуждения должны быть такими же, как про старосту и его заместителя. Если в той задаче мы выбирали *упорядоченную* пару (Катя — староста, а Вася — заместитель, не то же самое, что Вася — староста, а Катя — заместитель), то теперь мы выбираем *неупорядоченную* пару: отрядить дежурить Катю и Васю — то же самое, что отрядить дежурить Васю и Катю. То есть, одна неупорядоченная пара {Катя, Вася} как бы «вбирает» в себе две упорядоченные (Катя, Вася), (Вася, Катя). То есть любые две

[3] Обратите внимание, что P_n обозначает *число* перестановок из n элементов, а не сами эти перестановки.

упорядоченные пары, отличающиеся лишь порядком элементов, дают одну и ту же неупорядоченную пару. Значит, неупорядоченных пар в 2 раза меньше, чем упорядоченных и число это равно

$$\frac{A_{24}^2}{2} = \frac{24 \cdot 23}{2} = 12 \cdot 23 = 276.$$

Пример. Подсчитать сколькими способами можно выбрать из 10Б класса трёх дежурных в столовую. Решение. Мы уже понимаем, что речь идёт о неупорядоченных тройках из 24. Их меньше, чем упорядоченных, вопрос во сколько раз?

Ясно, что в одну неупорядоченную тройку «вбираются» все упорядоченные тройки, отличающееся лишь порядком следования элементов. Сколько таких упорядоченных троек? Иначе, сколькими способами мы можем переставить три элемента? В силу определения речь о перестановках, то есть $P_3 = 3!$ способами. Например, одна неупорядоченная тройка {Катя, Вася, Маша} порождает три упорядоченных:

(К, В, М), (В, К, М), (М, К, В),

(К, М, В), (В, М, К), (М, В, К)

Следовательно, число неупорядоченных троек в 3! раз меньше числа упорядоченных троек. И мы можем $\frac{A_{24}^3}{3!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!} = 2024$ способами выбрать из 10Б трёх дежурных в столовую.

Рассмотрим вопрос об неупорядоченных подмножествах в общем виде.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из k $(k = \overline{1, n})$ различных элементов данного множества, называется *сочетанием* из n элементов по k элементов (или просто сочетанием из n по k).

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (от фр. combinaison — сочетание, комбинация).

Выведем формулу для числа сочетаний из n по k.

1-й способ. По аналогии с выше разобранными примерами (упражнение).

2-й способ. Выпишем в столбик всевозможные сочетания из n по k. Получим таблицу из C_n^k строк и 1 столбца. К каждому сочетанию (в нём k элементов) припишем справа перестановки из его элементов. Перестановок может быть P_k штук, и у нас получается прямоугольная таблица размерности $C_n^k \times P_k$. В этой таблице перечислены все размещения из n по k, значит

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k \Leftrightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} \overset{(1)(3)}{=} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}, \text{ т.е.}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}. \qquad (4)$$

Последней формулой удобнее всего пользоваться при расчётах, но запомнить проще другую:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (5)$$

Формула (5) — элементарное следствие (4) и наоборот.

Учтя в (5) формулу (3) для числа перестановок, получим

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}P_k}. \qquad (6)$$

Зная понятие сочетаний и формулу для их числа, можно решить задачу про число способов выбрать трёх дежурных из 24 человек сразу: это число равно по формуле (4) $C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024$.

Заметим, что правая часть формулы (4) или (5) имеет смысл и при $k = 0$, она равна 1. Мы будем считать, что сочетание из n элементов по нулю — пустое множество — можно осуществить 1 способом, ничего не взяв. То есть $C_n^0 = 1$.

5. Свойства сочетаний

Их много, мы рассмотрим основные, остальные – в упражнениях.

I. $C_n^k = C_n^{n-k}$. Доказывать можно разными способами. Мы докажем алгебраически. В силу (6)

$$C_n^{n-k} = \frac{P_n}{P_{n-(n-k)}P_{n-k}} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = C_n^k, \text{ ч.т.д.}$$

Это свойство удобно использовать, например, а) для упрощения выражений, содержащие неизвестные: $C_{x-2}^{x-3} = C_{x-2}^{x-2-x+3} = C_{x-2}^1 = x-2$; б) для упрощения арифметических расчётов: $C_{100}^{98} = C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 50 \cdot 99 = 4950$, т.е. при $k > \left[\frac{n}{2}\right]$.

II. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Можно доказать равенство алгебраически (упражнение). В [2] см. комбинаторное доказательство.

Свойство II объясняет, почему числа C_n^k можно расположить по строкам треугольника Паскаля[4]. Этот треугольник изображён ниже на рисунке. По боковым сторонам треугольника стоят единицы, числа внутри треугольника расположены в шахматном порядке, и каждое внутреннее число равно сумме двух чисел, стоящих непосредственно над ним. Строки треугольника нумеруются сверху начиная с нуля. Числа в строках

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$$C_0^0$$

$$C_0^1 \qquad C_1^1$$

$$C_2^0 \qquad C_1^2 \qquad C_2^2$$

$$C_3^0 \qquad C_3^1 \qquad C_3^2 \qquad C_3^3$$

$$C_4^0 \qquad C_4^1 \qquad C_4^2 \qquad C_4^3 \qquad C_4^4$$

. . . .

нумеруются слева также с нуля. Число C_n^k стоит в n-й строке k-м по счёту (например, $6 = C_4^2$).

Про треугольник Паскаля ещё много можно чего порассказать….

---

[4] Конструкция этого треугольника была известна ещё до X века индийским математикам, после упоминалась в работах китайских, иранских и европейских математиков. Термин «Треугольник Паскаля» европейцы стали употреблять после выхода в свет в 1665 году книги Блеза Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике»

6. Размещения (с повторениями)

Пример. Нужно открыть дисковый сейфовый замок, для чего нужно правильно набрать код из 5 цифр (по одной цифре на 1 диске), а на дисках указано по 10 цифр. Сколько неудачных попыток может быть? **Решение**. Первую цифру мы можем набрать 10 способами, вторую – также 10 способами и т.д., пятую цифру — 10 способами, значит, по правилу произведения секретный код мы можем набрать $\underbrace{10\cdot\ldots\cdot 10}_{5\,раз}=10^5$ способами, один из них удачный, значит, неудачных попыток может быть на 1 меньше. **Ответ**: 10^5-1.

При решении этой задачи вырисовывается следующая комбинаторная конструкция.

Определение. Пусть есть n различных *видов* объектов (10 цифр на диске) из них составляются всевозможные расстановки (размещения) по k элементов (по 5 цифр — секретный код) в каждой. При этом в расстановки могут входить элементы одного вида. Две расстановки считаются разными, если они отличаются друг от друга или *видом* входящих в них элементов, или их *порядком*. Расстановки описанного типа называют k-*размещениями с повторениями* из n видов.

Число таких расстановок обозначают $\overline{A}_n^k$.

Имеет место формула

$$\overline{A}_n^k = n^k \tag{7}$$

Заметим, что здесь n и k могут быть любыми натуральными числами. Например, кодовый замок может состоять из 10 дисков, на каждом из которых нанесено 2 цифры. Тогда число вариантов кода равно $\overline{A}_2^{10}=2^{10}$.

Доказать (7) можно либо используя правило произведения, либо индукцией по k (упражнение).

Пример. Сколькими способами можно разложить k различных шаров в n различных ящиков? При этом мы можем «повторяться» и использовать ящик не один раз. **Решение**. Выложим k шаров в ряд. На каждом шаре можно написать любое число от 1 до n (номер ящика, в который кладётся шар). Всего получится n^k всевозможных способов надписать шары, то есть разложить их по ящикам.

Возможно, решать задачи на размещения с повторениями проще, если не строить математическую модель, а сразу используя правило произведения.

7. ПЕРЕСТАНОВКИ (С ПОВТОРЕНИЯМИ)

Определяя перестановки без повторений, мы переставляли предметы (элементы множества) которые были различны. Если же некоторые переставляемые предметы (элементы) одинаковы, то получится меньше перестановок (ведь некоторые из них будет совпадать друг с другом).

Например, буквы в слове «кот» можно расставить $3! = 6$ способами: кот, отк, кто, окт, тко, ток. А буквы в слове «как», лишь 3 способами: как, акк, кка.

Определение. Общая задача формулируется так: имеются предметы k различных типов. Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов 1-го типа, n_2 элементов 2-го типа, …, n_k элементов k-го типа? Такие комбинации называются перестановки с повторениями.

Обозначение. $P(n_1, \dots, n_k)$.

Число элементов в каждой перестановке равно $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$ по формуле (3). Но их меньше (ведь некоторые элементы повторяются). Используя правило произведения можно доказать (упражнение), что

$$P(n_1,\dots,n_k) = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!} \qquad (8)$$

Пример. Анаграммой назовём любую перестановку букв в слове/фразе (не обязательно осмысленную). Сколько анаграмм у слова «колокол». Решение. Всего в слове 7 букв, но различных букв — всего 3, при этом «к» повторяется 2 раза, «о» — 3 раза, «л» — 2 раза. По формуле (8) имеем

$$P(2,3,2) = \frac{7!}{2_1!3!2!} = 210.$$

8. СОЧЕТАНИЯ (С ПОВТОРЕНИЯМИ)

Рассмотрим **задачу**. В кондитерской продают 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, профитроли и корзиночки. Сколькими способами можно купить 7 пирожных? Решение. Ясно, что пирожные могут повторяться, но использовать модель размещений с повторениями не получится — так как, порядок, в котором пирожные лежат в коробке, — несущественен (в отличие от кодового замка, где, например, 11112 и 21111 — разные коды).

Чтобы решить задачу, отсортируем нашу покупку, выложив в ряд пирожные по типам. Допустим мы купили: нн, эээ, п, к.

Наличие пирожного будем маркировать «○», а разделитель между пирожными — «|»

нн |э э э| п |к

○○|○○○| ○ |○.

Что́ бы мы не купили у нас семь «○» и три разделителя. Ясно, что различным вариантам покупки будут соответствовать разные комбинации из семи «○» и трёх разделителей. Верно также и обратное. Значит, число различных способов купить пирожные равно числу перестановок с повторениями из семи «○» и трёх разделителей. В силу (8) имеем

$$P(7,3) = \frac{10!}{7! \cdot 3!}.$$

Определение. *Сочетаниями* из n различных типов элементов по k элементов *с повторениями* называются неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов, каждый из которых, принадлежит одному из этих типов.

Число всех сочетаний из n по k с повторениями обозначают $\overline{C}_n^k$.

Чтобы вывести формулу для $\overline{C}_n^k$, поступим также, как и примере про пирожные. Сопоставим каждому сочетанию с повторениями последовательность «○» и разделителей «|». Для каждого типа пишем столько «○», сколько элементов этого типа входит в комбинацию, различные типы отделяем разделителями (при этом, если элементы какого-то типа не вошли в комбинацию — пишем подряд два или больше разделителей «||»). Мы получим столько «○» сколько, предметов войдёт в комбинацию, а именно k, а разделителей будет на 1 меньше, чем число типов предметов, то есть $n-1$. Между множеством сочетаний и множеством описанных последовательностей «○» и «|» устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Число последних равно $P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$, а значит,

$$\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} \tag{9}$$

Приём, описанный в этом пункте, называется *методом шаров и перегородок*.

Можно посмотреть на конструкцию из «○— шар» и «| — перегородка» несколько иначе. У нас есть $n+k-1$ место, куда можно поместить либо шар, либо перегородку, причем «○» занимают ровно k мест. То есть, если мы распределим как-то среди $n+k-1$ мест k шаров, то остальные места заполняются перегородками автоматически. Так как шары одинаковые — то речь идёт о числе сочетаний из $n+k-1$ по k, а значит,

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \overset{(5)}{=} \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!}. \qquad (10)$$

Как видим, результат такой же, как формуле (9)[5].

Пример. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет. **Решение**. Ящики — задают нам типы, их три. Занумеруем их 1,2,3. На каждом шаре напишем номер ящика, куда положим шар. Тем самым нумерованные шары распределяются по типам. Ответ: $\overline{C}_3^5 = \frac{(3+5-1)!}{5!\cdot(3-1)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21.$

Сводная таблица комбинаций

Приведём таблицу, куда внесем *название* комбинации, *обозначение*, *формулу* и название «*типической*» задачи. Задачу мы старалась подобрать «запоминающуюся», но если вам какая-то не по душе — рекомендуем переписать таблицу на свой вкус.

(Arrangement) Размещения из n по k $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, n \ge k; k,n \in \mathbf{N}$ Конкурс красоты	(Permutation) Перестановки из n $P_n = n!\ n \in \mathbf{N}$ Очередь	(Combinaison) Сочетания из n по k. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, n \ge k$ $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ Дежурные в столовую
Размещения из n по k с повторениями $\overline{A}_n^k = n^k, \quad k,n \in \mathbf{N}$ Сейфовый замóк Телефонные номера	Перестановки из n с повторениями, $n = n_1 + \cdots n_k$ $P(n_1,\ldots,n_k) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$ Анаграмма	Сочетания из n по k с повторениями. $k,n \in \mathbf{N}$ $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = P(k,n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$ Покупка пирожных

Напоминаем, что обозначения введены для *числа* комбинаций, а не для самих комбинаций, которые по своей математической природе суть множества.

[5] Тут самое время порадоваться, что в математике, в отличие от бухгалтерии, результат не зависит от способа подсчёта.

Рекомендуемые источники

1. *Канунников А.Л., Кузнецов С.Л.* Комбинаторика: Методическая разработка для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета — М.: изд-во ЦПИ при мех-мат. ф-те МГУ, 2009 — 31.

2. *И.В. Яковлев*. Размещения, перестановки, сочетания. Интернет-ресурс. http://mathus.ru/math/apc.pdf

3. *Н. Я. Виленкин*, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2006, 400 с.

4. *Ануфриенко С.А.* — Введение в теорию множеств и комбинаторику. Екатеринбург: Уральский государственный университет им. А.М. Горького, 1998, 62 с.

Преподавателю: ввиду малого кол-ва часов, материал излагается не формализовано. Акцент сделан на ясности понятий, а, также, на иллюстрирующих эти понятия задачах и упражнениях. Теория множеств привлекается, как альтернативный язык, а не для теоретического обоснования.

Строго не вводятся понятия: отношение порядка, неупорядоченное множество, упорядоченное множество, комбинации, текст про отображения – в другом листке.