Метод рационализации неравенств (логарифмы)

Метод позволяет в ряде случаев упростить неравенство, содержащее сложное *трансцендентное (неалгебраическое)* выражение, сведя его к *рациональному* неравенству (их мы умеем решать *методом интервалов*).

Пусть знак $\diamond$ — один из знаков $\{<, \le, >, \ge\}$, знак $\overline{\diamond}$ — противоположный $\diamond$.

Идея

Рассмотрим неравенство

$$f(a) - f(b) \diamond 0. \qquad (1)$$

А) Если $f(x)$ — монотонно возрастающая функция, то есть бóльшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции, то $f(a) - f(b)$ и $a - b$ одинаковых знаков, следовательно,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \diamond 0, \\ \text{ОДЗ } f. \end{cases}$$

Б) Если $f(x)$ — монотонно убывающая функция, то есть меньшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции, то $f(a) - f(b)$ и $a - b$ разных знаков и при замене разности $f(a) - f(b)$ на $a - b$ знак неравенства $\diamond$ поменяется на противоположный $\overline{\diamond}$, т.е.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \,\overline{\diamond}\, 0, \\ \text{ОДЗ } f. \end{cases}$$

В частных случаях можно придумать формулу, которая будет работать одновременно для случаев А) и Б), об этом ниже, после примера 1.

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $\log_{x^2}(2 - x) \le 1$.

Решение. Перейдем к определенному основанию логарифма, чтобы быть уверенным в характере монотонности логарифма (например, к числу e), при этом используем формулу $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, тогда

$$\log_{x^2}(2 - x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(2 - x)}{\ln x^2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(2 - x)}{\ln x^2} - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(2 - x) - \ln x^2}{\ln x^2} \le 0 \Leftrightarrow$$

Натуральный логарифм — функция возрастающая, в числителе уже стоит разность, можно применять приём А). В знаменателе разность искусственно организуем, вычтя $0 = \ln 1$, и также заменим её как в А), получим

$$\begin{cases} \dfrac{2-x-x^2}{x^2-1} \le 0, \\ 2-x>0, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} \ge 0, \\ x<2, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \ge 0, \\ x<2, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{(x+1)} \ge 0, \\ x \ne 1, \\ x<2, \\ x \ne 0; \end{cases}$$

Решаем получившееся неравенство методом интервалов и пересекаем получившееся множество с ОДЗ, получаем

Ответ: $(-\infty,-2] \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$.

В примере мы перешли к логарифмической функции, про которую мы точно знали, что она возрастает. Можно было не переходить к другому основанию, а воспользоваться следующим приёмом:

$$\log_{a(x)} A(x) - \log_{a(x)} B(x) \diamond 0 \ (*) \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)\big(A(x)-B(x)\big) \diamond 0 (**) \\ A(x)>0 \\ B(x)>0 \\ a(x)>0, a(x) \ne 1 \end{cases}$$

Здесь все строчки кроме первой относятся к ОДЗ. Про ОДЗ часто забывают, пользуясь т.н. таблицами (см. в конце текста) сведéния логарифмических (показательных, тригонометрических и т.п.) неравенств к рациональным. Будьте внимательны, не теряйте ОДЗ!

Докажем, что равносильный переход от (*) к (**) имеет место.

Если основание логарифма $a(x)>1$, то логарифм по этому основанию возрастает, значит, рассуждая, как в А) левая часть (*) и $\big(A(x)-B(x)\big)$ одного знака. Домножение на $a(x)-1>0$ не меняет знака, поэтому равносильность имеет место.

Если основание логарифма $0<a(x)<1$, то логарифм по этому основанию убывает, значит, рассуждая, как в Б) левая часть (*) и $\big(A(x)-B(x)\big)$ разных знаков. Домножение на $a(x)-1<0$ восстанавливает знак, поэтому равносильность опять имеет место.

Решим пример 1, пользуясь (*)⇔(**):

$\log_{x^2}(2-x) \le 1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(2-x) - 1 \le 0 \Leftrightarrow \log_{x^2}(2-x) - \log_{x^2} x^2 \le 0 \Leftrightarrow$ пользуемся равносильностью (*) и (**)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(2-x-x^2) \le 0, \\ 2-x>0, \\ x \ne 1, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+1)(x+2) \ge 0, \\ x<2, \\ x \ne 1, \\ x \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+2) \ge 0, \\ x<2, \\ x \ne 1, \\ x \ne 0; \end{cases}$$

Решаем получившееся неравенство методом интервалов и пересекаем получившееся множество с ОДЗ, получаем

Ответ: $(-\infty,-2] \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$.

Таблица сведения логарифмических неравенств к рациональным

$\log_a A - \log_a B \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(A-B) \diamond 0$
$\log_a A - 1 \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(A-a) \diamond 0$
$\log_a A \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(A-1) \diamond 0$
$\log_a A + B \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(Aa^B - 1) \diamond 0$
$\log_a A - B \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(A - a^B) \diamond 0$
$\log_a A + \log_a B \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(A \cdot B - 1) \diamond 0$
$\log_a A \cdot \log_b B \diamond 0 \Rightarrow (a-1)(A-1)(b-1)(B-1) \diamond 0$

Равносильными переходы станут после учитывания ОДЗ логарифмов слева.

Везде вместо умножения на $(a-1)$ или $(b-1)$ можно было писать деление на эти же двучлены, ведь a и b — основания логарифмов они не равны 1 и убрав двучлены в знаменатель мы этого добьёмся, но ОДЗ это все равно не покрывает.

Достаточно запомнить идею и, может быть, первую формулу из таблицы. Без большого тренинга в стрессовой ситуации формулы из таблицы вряд ли вспомнятся верно. Их надежней вывести, как следствия из первой (*упражнение*).

Примеры на метод рационализации

№ 507770 с сайта решу ЕГЭ

$\dfrac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5} \geq \dfrac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$. Ответ: $\left[0,25;\ \dfrac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$.

№ 508574

$\log_{2x-3}(10-3x) \geq 0$. Ответ . $2 < x \leq 3$.

№507676

$\dfrac{\log_4(2^x-1)}{x-1} \leq 1$. Ответ $(1;\ +\infty)$.