Формула сложения скоростей и ускорений. Кинематика криволинейного движения на плоскости. Первый закон Ньютона. Сила
(Лекция 2 в 2015-2016 учебном году)

Относительность движения. Формула сложения скоростей

Положение одной и той же частицы мы можем одновременно рассматривать в разных системах отсчета. Ясно, что при этом у одной и той же частицы могут быть совершенно различные координаты, т.е. **положение тела относительно**. Но относительно и движение тела. Относительность движения заключается в том, что перемещение, скорость, ускорение и траектория движения тела относительно разных систем отсчета могут быть (все или часть из них) различными. Относителен и покой, как частный случай движения. Абсолютно покоящихся тел не существует.

Возникает естественный вопрос о том, как связаны между собой кинематические характеристики движения (перемещение, скорость, ускорения), найденные в двух системах отсчета, движущихся друг относительно друга.

Представьте себе, что пассажир идет со скоростью $V_{отн}$ вдоль вагона поезда, который движется со скоростью V_0 относительно Земли. С какой скоростью пассажир будет двигаться относительно Земли? Очевидно, ответ будет зависеть от того идет ли пассажир по ходу поезда или против хода. Поэтому исходный вопрос следует уточнить. Сделаем это, введя две системы отсчета и используя понятие проекции вектора скорости. Первую систему отсчета S (условно говоря, «неподвижную») свяжем с землей и направим соответствующую координатную ось Ox вдоль железнодорожного пути. Начало координат выберем в центре платформы. Вторую систему отсчета S’ (условно говоря, «движущуюся») свяжем с поездом и направим ее координатную ось $O'x'$ вдоль поезда в том же направлении, что и ось Ox. Начало координат второй системы отсчета выберем в самом конце поезда. Заметим, что часто движение относительно неподвижной системы отсчета называют **абсолютным,** а движение относительно подвижной системы отсчета – **относительным.**

Очевидно, что координаты пассажира в двух системах отсчета и координата конца поезда ($X_{0'}$) в любой момент связаны простым соотношением:

$$X = X_{0'} + X', \qquad (1)$$

а значит и изменения этих координат за любой интервал времени связаны также:

$$\Delta X = \Delta X_{0'} + \Delta X'. \qquad (2)$$

Подчеркнем, что при записи (1) и (2) мы существенным образом используем коллинеарность осей $O'x'$ и Ох движущейся и неподвижной систем отсчета. Важность последнего обстоятельства легко понять на примере мальчика, сидящего на вращающейся карусели. Если в этом случае в качестве движущейся системы отсчета попытаться рассматривать систему отсчета, жестко связанную с каруселью и с началом координат на оси карусели, то из (1) получится, очевидно, неверный результат. Действительно, в этом случае для любых интервалов времени $\Delta X_{0'} = 0$ (начало отсчета движущейся системы отсчета неподвижно относительно земли, т.к. выбрано на оси карусели), ΔX' (мальчик неподвижен относительно вращающейся карусели), но при этом, очевидно, в общем случае ΔX (мальчик движется относительно земли, т.к. карусель вращается).

Заметим, что уравнение справедливое для проекций векторов, естественно справедливо и для самих векторов (ведь вектора полностью задаются своими проекциями на декартовые оси). Поэтому уравнение (2) можно записать в векторном виде:

$$\vec{S}_{абс} = \vec{S}_{0'} + \vec{S}_{отн}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что удобство формулы (3) по сравнению с (2) заключается в том, что при записи (3) нет необходимости говорить что-либо про выбор направлений координатных осей в движущейся и неподвижной системах отсчета. Более того, для справедливости (3) эти оси не обязаны быть коллинеарными. Однако, при этом по-прежнему очень существенно, чтобы угол между направлениями этих осей не изменялся со временем, т.е. чтобы системы отсчета **двигались друг относительно друга поступательно**.

Таким образом, при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся поступательно относительно первой, перемещение тела относительно неподвижной системы отсчета ($\vec{S}_{абс}$) равно векторной сумме перемещения тела относительно подвижной системы отсчета ($\vec{S}_{отн}$) и перемещения подвижной системы относительно неподвижной ($\vec{S}_{0'}$). Рассмотрев перемещения за достаточно малый интервал времени dt и разделив (3) на dt сразу получим соотношение для мгновенных скоростей:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}_{отн}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{V}_{0'}$ – скорость поезда относительно земли и одновременно скорость относительно земли (т.е. относительно неподвижной системы отсчета) начала координат движущейся системы отсчета, связанной с поездом; $\vec{V}_{отн}$ – скорость пассажира относительно поезда, т.е. его скорость в движущейся системе отсчета, связанной с поездом; $\vec{V}_{абс}$ – скорость пассажира относительно земли, т.е. его скорость в неподвижной системе отсчета, связанной с землей.

Формула (4) называется **формулой сложения скоростей** для систем отсчета, движущихся поступательно друг относительно друга. Из нее следует, что «при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся поступательно относительно первой, скорость тела относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета и скорости подвижной системы относительно неподвижной».

Действуя аналогично, можно получить такую же формулу и для ускорений одного и того же тела, найденных в двух системах отсчета движущихся друг относительно друга поступательно:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{отн}, \qquad (5)$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение движущейся системы отсчета относительно неподвижной; $\vec{a}_{отн}$ – ускорение тела относительно движущейся системы отсчета; $\vec{a}_{абс}$ – ускорение тела относительно неподвижной системы отсчета. Формула (5) называется **формулой сложения ускорений** для систем отсчета, движущихся поступательно друг относительно друга. Из нее следует, что «при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся поступательно относительно первой, ускорение тела относительно неподвижной системы отсчета равно векторной сумме ускорения тела относительно подвижной системы отсчета и ускорения подвижной системы относительно неподвижной».

Формулы сложения скоростей и ускорений оказываются особенно удобными при исследовании движения нескольких тел. В этом случае поиск ответов на поставленные вопросы может существенно упроститься, если использовать рационально выбранную систему отсчета или несколько разных систем отсчета на разных этапах решения.

Подчеркнем, что мы получили формулу (4) исходя из наших повседневных наблюдений. Однако современное развитие физики привело к существенно более сложным представлениям о пространстве и времени, и, как результат, к другой формуле сложения скоростей. Например, оказывается, что скорость любого тела в любой системе отсчета не может превышать скорость света в вакууме (300 000 км/с), и, следовательно, формула (4) не может быть справедлива при скоростях движения сравнимых со скоростью света. Действительно, предположим, что поезд едет относительно земли со скоростью 200 000 км/с, и по ходу движения поезда по нему идет пассажир с такой же скоростью относительно поезда. Тогда в соответствии с формулой (4) скорость пассажира относительно земли оказывается больше скорости света, что невозможно, и значит формула (4) при таких больших скоростях движения не работает. Однако при скоростях движения много меньших скорости света, возникающие поправки настолько малы, что их практически невозможно измерить самыми точными современными приборами, и, значит, в этом случае можно спокойно пользоваться формулой (4), полученной в рамках классических физических представлений.

«Естественный» способ описания движения частицы

В тех случаях, когда в некоторой системе отсчета траектория криволинейного движения частицы известна заранее, часто используют так называемый «естественный» способ описания положения частицы. На заданной траектории выбирается начало отсчета – точка О, и положительное направление. Тогда текущее положение частицы в точке А однозначно задается криволинейной координатой р, такой, что |р| равен длине дуги ОА, причем р>0, если частица находится в положительном направлении от точки О и р<0, если – в отрицательном. При таком описании пользуются также так называемой «сопровождающей» системой координат. Одна ее ось – тангенциальная ось τ – направлена в каждой точке траектории по касательной в сторону выбранного положительного направления, а вторая ось – нормальная ось n – перпендикулярно первой и направлена в сторону вогнутости траектории. Очевидно, что при движении в одном направлении модуль изменения криволинейной координаты равен длине пути, пройденного частицей.

Как известно, скорость тела в любой точке направлена по касательной, проведенной в этой точке к траектории. Пусть в момент времени t частица находится в точке А, имеет ненулевую скорость $\vec{V}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$. Тогда спустя малый интервал времени dt частица будет иметь скорость $\vec{V}(t+dt)=\vec{V}(t)+\vec{a}(t)dt$. Возводя это векторное равенство в квадрат, получим: $V^2(t+dt)=V^2+2(\vec{V}\,\vec{a})dt+a^2(dt)^2$, где в правой части равенства для краткости опущен аргумент t, а также использовано известное свойство скалярного произведения $(\vec{V}\vec{V})=V^2$.

Считая, что dt достаточно мало, мы можем пренебречь последним слагаемым по сравнению с первыми двумя. Учитывая также, что в силу малости dt, второе слагаемое много меньше первого, и пользуясь приближенной формулой $(1 + x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/4 + \ldots \approx 1 + x/2$, справедливой при $x \ll 1$, получим:

$$V(t+dt)=\sqrt{V^2\left[1+\frac{2(\vec{V}\,\vec{a})}{V^2}dt\right]}\approx V(t)\left[1+\frac{a_\tau(t)dt}{V_\tau(t)}\right],$$

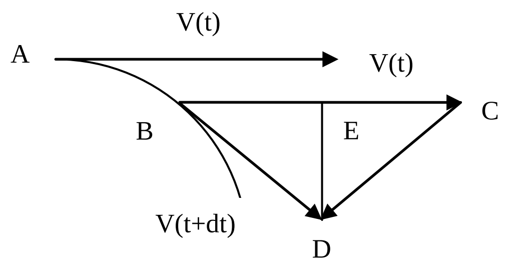
где учтено, что вектор скорости направлен по касательной к траектории, т.е. параллельно оси τ, и, следовательно, $V^2 = V_\tau^2$, $(\vec{V}\vec{a}) = V_\tau a_\tau$. За достаточно малый промежуток времени направление движения частицы будет сохраняться, и следовательно, знаки проекций ее скорости на тангенциальные оси сопровождающей системы координат в близкие моменты времени t и t +dt будут одинаковыми. Поэтому последнее равенство справедливо не только для величин скоростей, но и для их проекций: $V_\tau(t+dt) = V_\tau(t)\left[1+\frac{a_\tau(t)dt}{V_\tau(t)}\right] = V_\tau(t) + a_\tau(t)dt$. А это означает, что

$a_\tau(t) = \frac{V_\tau(t+dt) - V_\tau(t)}{dt} = \frac{dV_\tau(t)}{dt}$, т.е. <u>тангенциальная составляющая ускорения описывает изменение величины скорости при криволинейном движении и ни как не связано с изменением направления скорости</u>.

Движение по произвольной траектории с постоянным тангенциальным ускорением называется **равнопеременным**. Частным случаем равнопеременного движения является прямолинейное равноускоренное движение. По аналогии с прямолинейным равноускоренным движением нетрудно понять, что при произвольном равнопеременном движении проекция скорости V_τ и криволинейная координата p меняются по законам: $V_\tau = V_{\tau 0} + a_\tau t$, $p = p_0 + V_{\tau 0}t + a_\tau t^2/2$.

Любую гладкую криволинейную траекторию можно приближенно представить как последовательность дуг различных окружностей. Радиус окружности, дуга которой приближенно совпадает с достаточно малым участком траектории, включающим точку А, называется **радиусом кривизны траектории** в точке А. Центр этой окружности называется **центром кривизны траектории**.

Пусть участок траектории между близкими точками А и В приближенно совпадает с дугой окружности радиуса R, центр которой лежит в точке О. Так как касательная, проведенная через любую точку дуги окружности перпендикулярна соответствующему радиусу, то угол поворота вектора скорости dφ при движении частицы из точки А в точку В равен углу между радиусами ОА и ОВ. Следовательно, длина дуги АВ равна: dS = Rdφ. С другой стороны, в силу малости времени dt, движение частицы по дуге АВ можно считать почти равномерным: $dS \approx Vdt + a_\tau(dt)^2/2 \approx Vdt$. Объединяя две последние формулы, получаем:



$$d\varphi = Vdt/R \qquad (6)$$

Рассмотрим теперь треугольник BCD, построенный на векторах скоростей $\vec{V}(t)$ и

$\vec{V}(t+dt)$. По своему физическому смыслу $\overrightarrow{CD} = \vec{V}(t+dt) - \vec{V}(t) = \vec{a}(t)dt$, $\overrightarrow{CE} = \vec{a}_\tau(t)dt$, $\overrightarrow{ED} = \vec{a}_n(t)dt$, где $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ – тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Из прямоугольного треугольника BED имеем: sin(dφ) = ED/BD = $a_n$dt/V. Но для малых углов sin(dφ) ≈ dφ. Поэтому из последних двух формул имеем: Vdt/R = $a_n$dt/V. Откуда окончательно получаем:

$$a_n = V^2/R. \qquad (7)$$

Пусть частица движется от точки A к точке B, расположенной достаточно близко к точке A. Как уже говорилось, скорость всегда направлена по касательной к траектории. Поэтому, нетрудно убедится, что вектор ускорения в точке A и участок траектории AB будут лежать в одной и той же полуплоскости относительно касательной к траектории, проведенной в точке A. Т.е. ускорение в любой точке траектории направлено в сторону вогнутости траектории, и, следовательно, нормальная составляющая ускорения всегда направлена к центру кривизны траектории. Поэтому нормальную составляющую ускорения часто называют **центростремительным ускорением**. А поскольку нормальную ось n мы также направили в сторону вогнутости траектории, то естественно, что в правой части (7) стоит заведомо положительная величина. Ясно, что при движении по дуге окружности, центростремительное ускорение направлено к ее центру.

При описании движения по окружности (или дугам окружности) часто используют также понятие угловой скорости.

Средней угловой скоростью движения частицы по дуге окружности называется отношение угла поворота радиуса, соединяющего центр окружности с частицей, к промежутку времени, за который этот поворот произошел: $\omega_{ср} = \Delta\varphi/\Delta t$.

Мгновенной угловой скоростью движения частицы по дуге окружности называется предельное значение средней угловой скорости при стремлении интервала усреднения к нулю, т.е.: $\omega_{мгн} = d\varphi/dt \equiv \omega$.

Из приведенного определения и формулы (6) следует, что мгновенные линейная (V) и угловая (ω) скорости движения связаны между собой:

$$\omega = V_\tau/R, \qquad (8)$$

где R – радиус окружности. При записи (8) предполагается, что положительные направления отсчета угла и тангенциальной оси τ согласованы между собой. В противном случае в формуле (8) появится знак минус.

При описании *равномерного движения по окружности* используют также такие характеристики, как:

1) **Период обращения** T – время одного полного оборота. Очевидно, $T = 2\pi/\omega = 2\pi R/V$.

2) **Частота обращения** $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$ – число полных оборотов по окружности, совершаемых частицей в единицу времени.

Для описания *неравномерного движения по окружности* кроме угловой скорости используют также понятие углового ускорения.

Угловое ускорение (точнее мгновенное угловое ускорение) равно отношению малого изменения $d\omega$ мгновенной угловой скорости к достаточно малому промежутку времени dt, за который это изменение произошло: $\beta = d\omega/dt$.

Т.к. в силу (8) угловая и линейная скорости при движении по дуге окружности пропорциональны друг другу, то и их изменения также пропорциональны, т.е. $d\omega = dV_\tau/R$. Следовательно:

$$\beta = d\omega/dt = (1/R)\, dV_\tau/dt = a_\tau/R, \qquad (9)$$

т.е. угловое ускорение и тангенциальная составляющая линейного ускорнеия пропорциональны друг другу. При записи (9) (также как и при записи (8)) предполагается, что положительные направления отсчета угла и тангенциальной оси τ согласованы между собой. В противном случае в формуле (9) появится знак минус.

Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета

Начиная с Аристотеля, на протяжении почти двадцати веков существовало мнение, что движение с постоянной скоростью нуждается для своего поддержания во внешнем воздействии, а при отсутствии такого воздействия движение прекращается и устанавливается абсолютный покой. Замечу, что такое представление неизбежно тесно связано с представлением о неподвижном центре Вселенной – Земле и движущихся вокруг нее Солнце, Луне и звездах или неподвижном Солнце и движущихся вокруг него Земле и других планетах (Коперник).

Истинный переворот в понимании механического движения связан с именем итальянского мыслителя Джордано Бруно (1548 – 1600). Бруно выдвинул идею множественности миров: Солнце не является центром мироздания, оно лишь одна из бесчисленных звезд, но только расположено недалеко от нас. Это и нанесло решающий удар по механике Аристотеля. Ведь если нет центра мироздания, то бессмысленно говорить об абсолютном покое. Но, разрушив основную идею механики Аристотеля, Бруно не успел создать не ее месте ничего нового. Он был обвинен инквизицией в ереси и в 1600 году сожжен на костре.

Понадобился гений Галилея и Ньютона, чтобы до конца осознать, что объяснения требует не движение с постоянной скоростью, а изменение скорости. Подробнее с историей возникновения механики Ньютона можно ознакомиться в статье Г.Мякишева «Если бы Аристотель был прав» (Квант №2, 1995). Замечу лишь, что свои законы Ньютон опубликовал в 1687 году.

Опыты Галилея показали, что **все тела обладают свойством инертности**, которое заключается в том, что *изменение состояния покоя или движения тела происходит постепенно*, а не мгновенно. Подчеркну, что не обнаружено ни одного явления, которое бы противоречило этому утверждению. В начале 16 века Галилеем был также открыт **закон инерции**, согласно которому: «материальная точка покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на нее не действуют другие тела». Однако Галилею не удалось дать строгую формулировку этого закона. Это сделал Ньютон, введя понятие инерциальных систем отсчета.

Системы отсчета, в которых любая материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют другие тела, называются **инерциальными**. Иными словами инерциальными называются такие системы отсчета, в которых закон инерции, открытый Галилеем, выполняется точно. Подчеркну, что в определении инерциальных систем отсчета нет фразы «или действие всех тел скомпенсировано», т.к. ее включение делает невозможным построение внутренне не противоречивой механики Ньютона.

Первый закон Ньютона: инерциальные системы отсчета (ИСО) существуют.

Заметим, что первый закон Ньютона: 1) утверждает взаимодействие тел как единственную возможную причину изменения состояния их движения в ИСО; 2) указывает на эквивалентность состояний покоя и равномерного прямолинейного движения в том смысле, что оба состояния сохраняются в ИСО в отсутствии внешнего воздействия.

Введение ИСО основано на использовании представления о свободном теле, на которое не действуют другие тела. При этом мы опираемся на принципиальное свойство окружающего нас мира: все взаимодействия между телами исчезают при их удалении друг от друга на бесконечно большие расстояния. Однако, с другой стороны, поскольку невозможно удалить одно из тел на бесконечное расстояние от всех остальных тел, то невозможно и осуществить непосредственную экспериментальную проверку первого закона Ньютона. По существу этот закон представляет собой экстраполяцию результатов реальных опытов по проверке закона инерции Галилея на идеализированный случай полного отсутствия внешних воздействий.

Сила

Итак, мы знаем, что будет происходить со свободным телом в инерциальной системе отсчета. Возникает естественный вопрос, а что будет с телом, если на него будут действовать другие тела. Опыт показывает, что в этом случае тело может изменить состояние своего движения, а также деформироваться. Оно, конечно, может еще претерпеть химические превращения и многое другое. Но сейчас нас интересуют только механические последствия действия тел друг на друга.

Силой называется количественная характеристика взаимодействия тел, приводящего к изменению их состояния движения или деформации.

Если мы хотим, чтобы сила была полноценной физической величиной, мы обязаны указать способ ее измерения.

Возьмем определенную (эталонную) пружинку. В свободном состоянии она имеет некоторую длину. Растянем ее строго вдоль оси на определенную величину. Назовем такую растянутую пружину **эталоном силы** $\mathbf{F_0}$. Т.е. мы *по определению* считаем, что такой эталон силы действует на прикрепленную к его концу частицу с силой $\mathbf{F_0}$, направленной вдоль оси пружины в сторону ее центра. Это определение! Мы могли бы определить параметры эталона силы и иначе. Например, можно было бы считать, что сила, действующая на любую частицу со стороны эталона силы, направлена перпендикулярно оси растянутой пружины. Это, естественно, привело бы к иным более сложным формулировкам второго и третьего законов Ньютона, а также к другим формулировкам законов для основных типов сил, действующих между телами.

Изготовим теперь много таких одинаковых пружинок и, растянув их на одинаковую величину, сделаем из них много эталонов силы $\mathbf{F_0}$.

Определение. Пусть на частицу одновременно действует N одинаково направленных эталонов силы $\mathbf{F_0}$ и неизвестная сила F. Тогда, если частица при этом движется в инерциальной системе отсчета равномерно и прямолинейно или покоится, то говорят, что сила F имеет величину $N\mathbf{F_0}$, а ее направление противоположно направлению эталонов силы $\mathbf{F_0}$.

Замечание. Данное определение позволяет:

1) Экспериментально убедиться, что все изготовленные эталоны силы $\mathbf{F_0}$ действительно действуют на тела с одинаковой по величине силой.

2) Измерять и изучать силы любой природы, например, силы упругости, возникающие при деформации тел. И это можно делать ни чего не зная о втором и третьем законах Ньютона. К слову замечу, что исторически закон Гука, связывающий величину малой деформации тела с величиной вызвавшей эту деформацию силы, был сформулирован почти за 30 лет до публикации законов Ньютона.