Математическое программирование

Каждый человек ежедневно, не всегда осознавая это, решает проблему получения наибольшего эффекта, при затрате ограниченных средств. Чтобы достичь наибольшего эффекта, имея ограниченные средства, надо изобрести и придерживаться некой системы действий. И если ещё можно представить себе отдельных людей, которых, подобно сыну арабского шейха, имеют для своей жизни почти неограниченный запас ресурсов[1], то нет на земле страны, экономика которой могла бы себе позволить игнорировать принцип: стремись тратить оптимально.

Многие повседневные задачи, которые приходится решать в деятельности человека допускают те или иные решения, как говорят, являются многовариантными. И нужно отыскать наилучший (оптимальный) в некотором смысле вариант, при ограничениях, которые диктуются теми или иными условиями реальности. Множество хозяйствующих людей образуют сообщества, предприятия, производства, отрасли. Вся хозяйственная деятельность общества, а также совокупность отношений, складывающихся в системе производства, распределения, обмена и потребления называется «экономика».

Основные экономические проблемы одинаковы для любого общества, независимо от типа его политической организации, является ли оно капиталистическим, социалистическим или каким-либо другим.

Смысл экономического успеха в двух словах – потратить поменьше ресурсов, получить побольше продукта.

В 1937 году к 25-летнему математику Л.В. Канторовичу обратились работники фанерного треста с задачей о наиболее выгодном распределении материала между станками. Фанерный трест налаживал выпуск военных самолетов, задача стояла государственной важности.

Леонид Витальевич Канторович — вундеркинд, окончивший университет в 18 лет и ставший профессором в 22, доктором д.ф.-м.н в 23 года.

Было известно, что задача сводилась к нахождению максимума линейной функции, заданной на многограннике. Максимум такой функции достигался в вершине, однако число вершин в этой задаче достигало миллиарда. Поэтому простой перебор вершин не годился. Канторович модифицировал ранее известный метод для решения поставленной задачи решения и понял, что к такого рода задачам, сводится колоссальное количество проблем экономики.

[1] Автомобиль сына шейха «сломался» посреди трассы. Вызванная ремонтная бригада установила, что в авто кончился бензин. Сын шейха спрашивает: — «А что такое бензин?» Автомеханик: «А что вы делали раньше, когда ваша машина останавливалась?» — «Я покупал другую…».

В 1939 году он опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой описал задачи экономики, поддающиеся открытому им математическому методу и тем самым заложил основы *линейного программирования*.

В США линейное программирование возникло в 1947 г. в работах Джорджа Данцига, который всегда отмечал приоритет Канторовича.

Сам термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Тьяллингом Купмансом[2]. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Если некое производство, скажем, имеет большие масштабы и конкуренция в отрасли сильно развита, то тот, кто владеет математическим методом, позволяющим отыскивать оптимальные решения, обладает ценным преимуществом в своём деле. В современных условиях даже незначительные ошибки при планировании производства могут привести к упадку или даже банкротству производства. Знание математики не гарантирует экономический (или иной) успех, но делает его более вероятным.

Современные методы математического программирования[3] позволяют решать задачи, включающие до одного миллиарда переменных. Для таких огромных задач используются большие параллельные суперкомпьютеры с более чем тысячей процессоров. Но даже на намного более скромных 4-процессорных компьютерах задачи линейного программирования с миллионом переменных решаются за полчаса.

Задача о смесях. В различных отраслях хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, смесей в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д.. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

> **Учебный пример.** Для изготовления определенного сплава из свинца, цинка и олова используется сырье (сплавы) из тех же металлов, отличающееся составом и стоимостью.

[2] Tjalling Charles Koopmans – американский экономист голландского происхождения.
[3] Более общая дисциплина, чем линейное программирование. В её рамках также решаются задачи оптимизации функций, но модели могут быть нелинейными.

	Содержание в процентах		
Компоненты	1 сырьё	2 сырьё	3 сырьё
Свинец	10	10	40
Цинк	10	30	50
Олово	80	60	10
Стоимость, у.е.	4	4,5	5,8

Определить, сколько нужно взять сырья каждого вида, чтобы изготовить с *минимальной себестоимостью* сплав, содержащий олова не более 30%, цинка не менее 10%, свинца не более 40%.

Переведём задачу на математический язык, или как говорят математики, построим её математическую модель:

Пусть x — доля 1-го сырья в единице полученного сплава, y — доля 2-го сырья, z — доля 3-го сырья.
Тогда себестоимость единицы сплава в у.е. запишется следующим образом:

$$F(x, y, z) = 4 \cdot x + 4{,}5 \cdot y + 5{,}8 \cdot z\,.$$

Цель состоит в минимизации затрат, то есть нужно искать такой набор (x, y, z), чтобы себестоимость единицы сплава была наименьшей

$$F(x, y, z) = 4 \cdot x + 4{,}5 \cdot y + 5{,}8 \cdot z \to \min\,. \qquad (1)$$

Но (x, y, z) a priori могут быть не любыми: условие задачи диктует нам ограничения них, которые выливаются в следующую систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ 0{,}8 \cdot x + 0{,}6 \cdot y + 0{,}1 \cdot z \le 0{,}3; \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}3 \cdot y + 0{,}5 \cdot z \ge 0{,}1; \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}1 \cdot y + 0{,}4 \cdot z \le 0{,}4; \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \; z \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

(1), (2) — и есть наша математическая модель рассматриваемой задачи.
У нас получилось три переменные, поэтому задача будет называться трёхмерной. В реальных задачах, решаемых на производстве в экономике количество переменных может исчисляться десятками (а иногда и сотнями), поэтому вместо $x, y, z, \ldots$ используют букву с индексами (номерами) $x_1, \ldots x_n$, иначе никакого алфавита не хватит, к тому же в такой записи легче ориентироваться. Задачи будут называться многопеременными.

Задача (1), (2) решается в рамках дисциплины «Математическое программирование» — область математики, которая разрабатывает теорию и численные методы решения задач на экстремум с ограничениями.
В (1), (2) функция, для которой ищут экстремум (минимум), а также ограничения — линейные, поэтому (1), (2) — это задача *линейного программирования*.

Термин «программирование» нужно понимать в смысле «планирование» (один из переводов англ. *programming*). Законно употребление выражения «программа для решения задачи линейного программирования». Термин был введён и успел прижиться ещё в докомпьютерную эру (см. исторический очерк В.В. Вавилова о В.Л. Канторовиче).

Мы с этого момента будем рассматривать только задачи линейного программирования для случая функции двух переменных.

Графический способ решения задач линейного программирования.

Задача линейного программирования (ЗЛП) с двумя переменными ставится так. Требуется найти условный экстремум (максимум или минимум) линейной функции двух переменных x и y

$$F(x,y) = c_1 x + c_2 y \to \max(\min), \qquad (1)$$

при этом на переменные x, y накладываются *ограничения* в виде нестрогих неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \ge b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x + a_{n2}y \ge b_n, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Функция F называется *целевой функцией* (*функция цели*). В (1), (2) c_1, c_2, $a_{i1}, a_{i2}, b_i \quad (i = \overline{1,n})$, — известные числа, а x и y — *неизвестные*.

Совокупность (1), (2) называется задачей линейного программирования.

Любой набор (x,y), удовлетворяющий системе ограничений (2), называется *допустимым* решением данной ЗЛП.

Множество всех допустимых решений данной ЗЛП называется её *допустимой областью*.

Допустимое решение, на котором достигается требуемый экстремум целевой функции (1), называется *оптимальным* решением данной ЗЛП или *планом*.

Задачу (1), (2) можно решить графически.

Условия (2) задают на плоскости xOy некоторую область. В самом деле, каждое из неравенств задаёт замкнутую полуплоскость, лежащую выше или ниже (левее или правее) известной прямой. Пересечение этих полуплоскостей даст нам допустимую область. Может встретиться один из следующих трёх случаев:

1) пустая область;
2) выпуклый многоугольник;
3) неограниченная выпуклая многоугольная область.

В случае 1) решения ЗЛП не существует; в случае 2) — решение есть всегда; в случае 3) — может быть, может не быть.

Целевая функция F принимает **одно и то же значение** α во всех точках прямой $c_1x+c_2y=\alpha$. Эта прямая называется *линией уровня* целевой функции. Если α менять, то линия уровня (прямая) будет перемещаться в плоскости xOy параллельно самой себе.

Идея решения задачи (1), (2): чтобы найти экстремум целевой функции F, нужно найти такие точки допустимой области, которые принадлежат линии уровня с *наибольшим* (*наименьшим*) значением параметра α.

Заметим, что вектор $c=(c_1,c_2)$ перпендикулярен прямой $c_1x+c_2y=\alpha$ и показывает направление наибольшего роста целевой функции F.

Будем перемещать прямую $c_1x+c_2y=\alpha$ в направлении вектора $c=(c_1,c_2)$ до тех пор, пока её дальнейшее перемещение даст пустое пересечение с допустимой областью. Это положение и даст максимум F. Если аналогичное действие совершать в направлении вектора $-c=(-c_1,-c_2)$, то указанное положение даст минимум целевой функции F.

Учебная задача. Бетон, производимый на заводах А и В, надо развести по строительным площадкам № 1, № 2, № 3. Завод А производит 320 т бетона в сутки, а завод В — 380 т. Потребность в бетоне за сутки на стройплощадке № 1 — 200 т, на стройплощадке № 2 — 280 т, и на стройплощадке № 3 — 220 т. Стоимость перевозки одной тонны бетона с завода на стройплощадку дается в таблице:

Заводы \ Стройплощадка	№ 1	№ 2	№ 3
А	2	4	6
В	4	5	3

Требуется составить план перевозок бетона, при котором стоимость перевозок будет наименьшей.

Решение. Обозначим x — кол-во тонн бетона, перевозимого в сутки с завода А на площадку №1, а y — кол-во тонн бетона, перевозимого в сутки с завода А на площадку №2. План перевозок задается следующей таблицей:

Стройплощадка / Заводы	№ 1	№ 2	№ 3
А	x	y	$320-x-y$
В	$200-x$	$200-y$	$x+y-100$

Стоимость запланированных перевозок (целевая функция):

$$F(x,y)=2x+4y+6(320-x-y)+4(200-x)+5(280-y)+3(x+y-100)\Leftrightarrow$$

$$F(x,y)=3820-5x-4y\to\min. \qquad (1)$$

По условию задачи x и y надо подобрать так, чтобы значение этого выражения, то есть стоимость перевозок, было наименьшим. Или, что тó же, чтобы значение целевой функции

$$F^{*}(x,y)=5x+4y\to\max. \qquad (1^*)$$

было наибольшим.

При этом нужно учитывать, что переменные x и y не могут принимать произвольные значения. А именно, условия задачи приводят к следующим ограничениям:

$$\begin{cases}320-x-y\ge 0,\\ 200-x\ge 0,\\ 280-y\ge 0,\\ x+y-100\ge 0,\\ x\ge 0,\quad y\ge 0.\end{cases} \qquad (2)$$

(1), (2) или (1*), (2) — *математическая модель* нашей задачи о перевозке бетона — задача линейного программирования. Мы будем рассматривать (1*), (2).

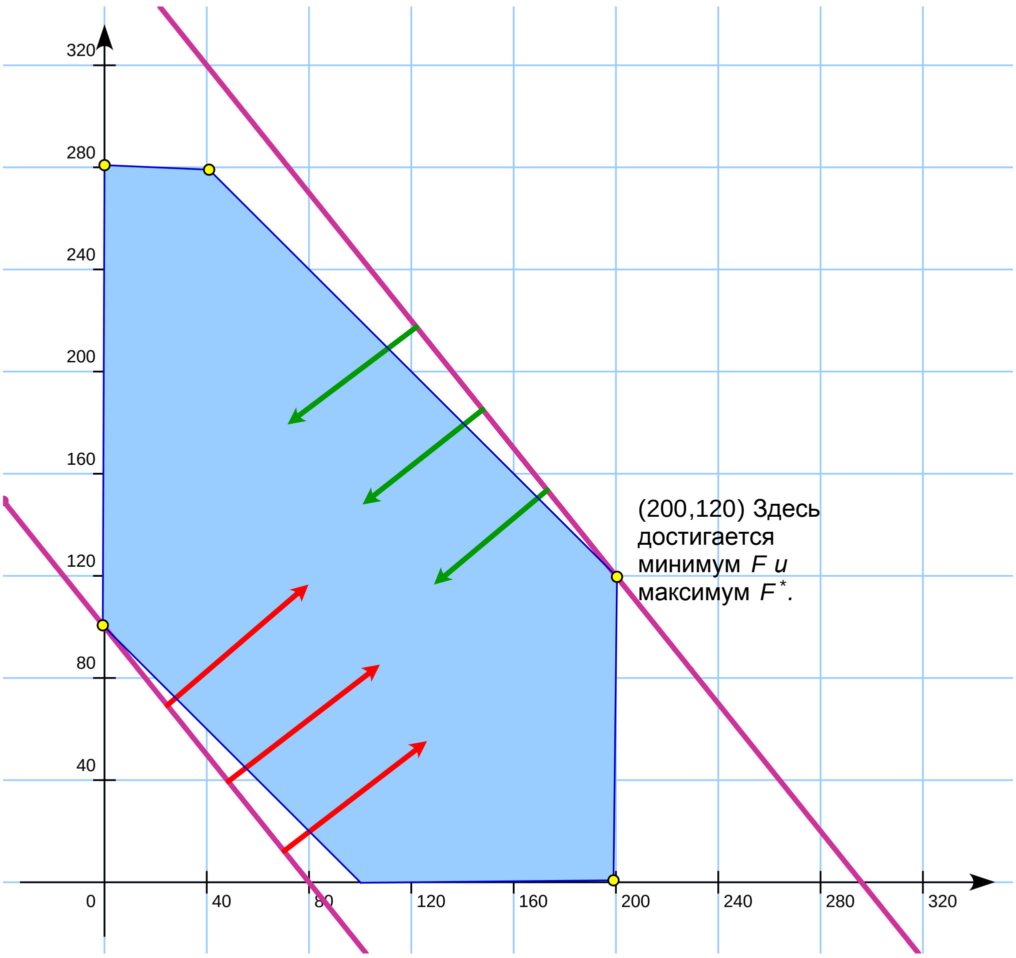
Нарисуем на координатной плоскости область, которую определяет система (2) — область допустимых значений. Для этого нужно провести прямые

$$320-x-y=0,\quad 200-x=0,\quad 280-y=0,\quad x+y-100=0,\quad x=0,\quad y=0,$$

а затем сообразить какая часть плоскости отвечает ограничительным неравенствам.

Наша допустимая область выделена голубым (см. рисунок). Будем максимизировать функцию $F^*(x,y)=5x+4y$. Для этого будем перемещаться по допустимой области в направлении вектора $c=(c_1,c_2)=(5,4)$ — выделен красным. Крайние положения линии уровня нарисованы фиолетовым. Начальное положение даст минимум целевой функции F^*, а конечное — максимум.

Можно двигаться по голубой области в направлении вектора $-c=(-c_1,-c_2)=(-5,-4)$ (выделено зелёным), тогда, соответственно, начальное



положение линии уровня даст максимум целевой функции F^*, конечное — минимум.

Можно не рисовать линии уровня, а определить значения целевой функции с вершинах многоугольника (если их не очень много) и выбрать максимальное (минимальное).

Точка, в которой достигается максимум F^*, определяется пересечением прямых:

$$\begin{cases} 320 - x - y = 0, \\ 200 - x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120, \\ x = 200. \end{cases}$$

Подставляя это значение в целевую функцию (1) получаем, что минимальные затраты на перевозку в сутки составляют 2340 у.е. При любых других вариантах перевозок, затраты будет больше.

Заметим, что если линия уровня параллельна одному из отрезков границы допустимой области, то экстремум достигается в любой точке этого отрезка, так как в любой точке этого отрезка выполняется $F(x, y) = c_1 x + c_2 y = const$. При этом для подсчёта экстремума можно брать любую точку такого отрезка — например, любой конец.

Литература для дополнительного чтения

1. Холод, Н.И. Пособие по решению задач по линейной алгебре и линейному программированию: Пособие для вузов. - Минск: издательство БГУ, 1971. - С.159.

2. http://math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/lvk100.html С.Куталадзе. Математика и экомномика Канторовича. Тезисы к 100-летию Канторовича (не для первого чтения

3. Текст В.В. Вавилова. Задача Фанерного треста и рождение математической экономики.

4. Б.Т. Поляк. История математического программирования в СССР. Анализ феномена. 2008 г.

5. Л.В. Канторович. Математические методы организации и планирования производства. Ленинград: издательство ЛГУ, 1939. - С.70.

6. http://kantorovich.vixpo.nsu.ru Музей Л.В. Канторовича