

Устная олимпиада по комбинаторике

Старшая лига

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 2016 так, чтобы все суммы соседних чисел были разными?

Решение. Рассмотрим расстановку $1, 2, 3, \dots, 2014, 2016, 2015$. Выпишем суммы соседних чисел: $1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 4 = 7, \dots, 2013 + 2014 = 4027, 2014 + 2016 = 4030, 2016 + 2015 = 4029, 2015 + 1 = 2016$. В этом списке по одному разу появятся нечетные числа $3, 5, \dots, 4027, 4029$ и четные $4030, 2016$.

Ответ. Да, можно.

2. В стране $n > 5$ городов, между любыми двумя есть воздушное сообщение. Антимонопольный комитет хочет распределить все авиалинии между двумя авиакомпаниями так, чтобы

- (а) между любыми двумя городами летала ровно одна авиакомпания;
- (б) из любого города можно было бы добраться до любого как с помощью одной авиакомпании, так и с помощью другой.

Докажите, что есть не менее $(n - 1)!(n + 1)$ способов сделать это.

Решение. Рассмотрим какой-то цикл длины n и пронумеруем вершины вдоль цикла числами от 1 до n . Покажем, что по остальным ребрам можно добраться от любой вершины до любой. Для этого достаточно показать, что из вершины 1 можно попасть в вершину 2. Действительно, так как $n > 4$, ни одно из ребер пути $1 - 4 - 2$ не лежит в исходном цикле. Значит цикл можно отдать одной авиакомпании, а все остальное — другой.

Теперь нужно посчитать количество способов выбрать цикл. Пойдем по циклу, начиная с некоторой фиксированной вершины. Выбрать следующую вершину можно $n - 1$ способом, следующую — $n - 2$ способами и т.д. Однако, каждый цикл мы посчитали дважды, так как по нему можно идти в две стороны, то есть всего их $\frac{(n-1)!}{2}$ штук. Так как мы можем отдать цикл любой их авиакомпаний, то мы построили $(n - 1)!$ способ раздать авиалинии. При этом ни один способ не посчитан дважды, так как при $n > 5$ в дополнении к циклу $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} > n$ ребер, а значит само по себе оно циклом не является.

Теперь из каждой построенных конфигураций получим ещё n разных, отдав n способами одно из ребер цикла другой авиакомпании. Это даст нам ещё $n \cdot (n - 1)!$ конфигурации.

В сумме получим как раз $(n - 1)! + n \cdot (n - 1)! = (n + 1) \cdot (n - 1)!$.

3. Все натуральные числа красятся в черный и белый цвета так, чтобы:

(а) оба цвета встречались;

(б) если числа a и b (возможно, равные) одного цвета, то число $3a + b$ — того же цвета.

Найдите все такие раскраски.

Решение. Без ограничения общности, можно считать, что единица белая. Тогда белыми будут $1 + 3 \cdot 1 = 4$, $4 + 3 \cdot 1 = 7$ и вообще все числа вида $3n + 1$. Пусть число x черное. Покажем, что все числа, дающие тот же остаток при делении на 3 тоже черные. Пусть $x - 3$ белое. Тогда $(x - 3) + 3 \cdot 1 = x$ тоже белое, чего не может быть. То есть $x - 3$ черное, аналогично $x - 6$, $x - 9$ и вообще все меньшие числа с тем же остатком по модулю 3 черные. Докажем теперь, что есть сколь угодно большое черное число, дающее тот же остаток при делении на 3, что и x . Действительно, пусть y — наибольшее число с таким свойством. Но тогда $y + 3y$ должно быть и больше, и черным, и с тем же остатком от деления на 3. Таким образом, все числа с одним и тем же остатком от деления на 3 будут иметь один и тот же цвет.

Заметим, что любая покраска остатков от деления на 3 в два цвета, где оба цвета встречаются, будет подходить под условие.

Ответ. Под условие подходят в точности те раскраски, при которых встречаются оба цвета, причем числа с одним и тем же остатком от деления на 3 одного цвета.

4. Талантливый мальчик Петя Торт загадал натуральное число от 1 до 1000. Вы можете задавать ему вопросы вида «Принадлежит ли твоё число множеству X ?». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать загаданное число?

Решение. Докажем, что потребуется не меньше 14 вопросов. Пусть у нас есть некоторый алгоритм, которому требуется n вопросов. Если в некоторых случаях требуется меньше, то для верности зададим последний вопрос ещё несколько раз, чтобы всего вопросов было всегда задано ровно n . Тогда в результате работы алгоритма мы узнаем загаданное число, а значит правильные ответы на все вопросы, а значит и момент, когда испортилось настроение. Таким образом, у нас есть $1000n$ разных «исходов»: 1000 возможных чисел и

настроение могло испортиться после любого из n вопросов. Каждому исходу должен соответствовать свой набор ответов на вопросы, коих в данном случае 2^n . Значит, должно выполняться неравенство $2^n \geq 1000n$. При $n < 10$ левая часть попросту меньше 1000, дальше первое число, когда неравенство выполнено $n = 14$.

Покажем, как узнать число за 14 вопросов. В двоичной записи чисел от 1 до 1000 не более 10 знаков. Обозначим через Q_i вопрос «Равен ли i -ый знак с конца в загаданном числе единицей?». Для однозначной идентификации числа нам достаточно узнать правдивые ответы на вопросы $Q_1, \dots, Q_{10}$.

Зададим вопросы $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_1$. Если ответы на Q_1 различны, то настроение уже испортилось. Зададим ещё раз вопрос Q_4 . Так мы узнаем заведомо ложный ответ на него (а инвертировав, узнаем и правильный) и узнаем, испортилось настроение до Q_4 или после. Если до, то надо ещё раз задать вопросы Q_2 и Q_3 , а ответы на Q_5 и Q_6 нам уже известны, так как при ответе на них Петя уже врал. Если после, то, наоборот, надо задать ещё раз Q_5 и Q_6 , а ответы на Q_2 и Q_3 были правдивы. Таким образом, мы уже задали 10 вопросов. Теперь зададим Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10} — Петя точно солжет, а значит мы узнаем правильные ответы на них.

Если ответы на Q_1 были одинаковы, значит настроение ещё не портилось, то есть мы знаем правильные ответы на вопросы $Q_1 - Q_6$. Зададим вопросы Q_7, Q_8, Q_9, Q_1 . Если ответ на Q_1 изменился, то настроение уже испортилось. Зададим ещё раз вопрос Q_8 . Так мы узнаем заведомо ложный ответ на него (а инвертировав, узнаем и правильный) и узнаем, испортилось настроение до Q_8 или после. Если до, то достаточно задать ещё раз Q_7 . Если после, то достаточно задать ещё раз Q_9 . Мы задали уже 13 вопросов, зададим теперь Q_{10} — на него получим заведомо ложный ответ, чего нам и достаточно.

Если опять ответы на Q_1 одинаковы, то настроение ещё не портилось, то есть мы знаем ответы на $Q_1 - Q_9$. Зададим вопросы Q_{10}, Q_1, Q_{10} . Если ответ на Q_1 всё тот же, то первый из ответов на Q_{10} истинный, а если ответ на Q_1 не такой, то второй из ответов на Q_{10} заведомо ложный.

Ответ. 14.

5. Талантливый мальчик Петя Торт проводит тренинг по тимбилдингу в компании из $2n + 1$ человека следующим нехитрым способом. В течение n дней он всех их выстраивает в хоровод, причем таким образом, чтобы каждые два человека стояли в хороводе рядом ровно один раз. Докажите, что ему это удастся при любом натуральном n .

Решение. Переформулируем задачу на язык теории графов. В качестве вершин графа возьмем сотрудников, между каждыми двумя проведем ребро. Задача сводится к тому, чтобы в полученном графе найти n несамопересекающихся циклов длины $2n + 1$ таких, чтобы каждое ребро принадлежало ровно одному из циклов. Такие циклы называются *гамильтоновыми*.

Расположим $2n$ точек, $A_1, \dots, A_{2n}$ в вершинах правильного $2n$ -угольника. Проведем ломаную $A_1 A_2 A_{2n} A_3 A_{2n-1} A_4 A_{2n-2} \dots A_{n+3} A_n A_{n+2} A_{n+1}$. Каждая возможная длина диагонали правильного $2n$ -угольника встречается среди ребер этой ломаной встречается дважды, кроме диаметра — он встречается ровно один раз. Рассмотрим повороты этой ломаной на углы $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$. Объединение ломаной и всех этих поворотов будет при дальнейших поворотах на углы кратные $\frac{2\pi}{n}$ переходить в себя, а значит, в силу симметрии, каждая диагональ правильного $2n$ -угольника будет покрыта одной из повернутых ломаных. С другой стороны, диагоналей $(2n-1)n$, а ломаных n штук по $2n-1$ звену, а значит каждая диагональ будет покрыта ровно один раз.

Добавим к полученной конструкции точку A_0 и соединим её кривыми со всеми точками $A_1, \dots, A_{2n}$. Искомое разбиение на гамильтоновы циклы будет получаться из каждой из повернутых ломаных вкупе с ребрами от A_0 до её концов.

Устная олимпиада по комбинаторике

Младшая лига

1. Пять команд A, B, C, D и E играют в настольный теннис однокруговой турнир (победа — 2 очка, поражение — 0 очков, ничья — 1 очко). Команды B, C, D и A набрали 3, 3, 8 и 1 очко соответственно. Кроме того, известно, что результаты матчей $E - B$ и $E - C$ одинаковы (то есть либо E в обоих выиграла, либо в обоих проиграла, либо в обоих ничья). Кто как с кем сыграл?

Решение. Так как каждая команда сыграла по 4 матча, D все сыгранные матчи выиграла. Кроме того, всего было сыграно 10 матчей, причем в каждом из них разыгрывалось по два очка, а значит команда E набрала $(20 - 3 - 3 - 8 - 1) = 5$ очков. Один матч она проиграла D , а значит из остальных трёх два закончились победой E и один ничьей. Так как матчи $E - B$ и $E - C$ закончились одинаково, E выиграла у B и у C и сыграла вничью с A . Так как A набрала всего одно очко, она проиграла B и C . Оставшийся нерассмотренным матч $B - C$ должен завершиться вничью.

Ответ. D выиграла у всех, E выиграла у B и у C , B и C выиграли у A , остальные матчи закончились ничьей.

2. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 2016 так, чтобы все суммы соседних чисел были разными?

Решение. Рассмотрим расстановку $1, 2, 3, \dots, 2014, 2016, 2015$. Выпишем суммы соседних чисел: $1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 4 = 7, \dots, 2013 + 2014 = 4027, 2014 + 2016 = 4030, 2016 + 2015 = 4029, 2015 + 1 = 2016$. В этом списке по одному разу появятся нечетные числа $3, 5, \dots, 4027, 4029$ и четные $4030, 2016$.

Ответ. Да, можно.

3. В Солнечном городе живут $4n$ коротышек, из них $2n$ девочек и $2n$ мальчиков. Знайка хочет каждый день в течение n дней выстраивать их всех в хоровод так, чтобы рядом стояли коротышки разного пола, и никакие два коротышки не стояли рядом больше одного раза. Докажите, что ему это удастся.

Решение. Расставим детей в хоровод так, чтобы пол детей чередовался. После этого каждый день мальчики будут оставаться на своих местах, а девочки будут сдвигаться по циклу на место следующей девочки (то есть через одного человека). Легко видеть, что никакие два ребенка не будут стоять рядом дважды. Однако, всего пар мальчик-девочка у нас $4n^2$ и в каждом хороводе $4n$

пар соседей, а значит отсюда следует, что каждая пара будет стоять хоть раз рядом.

4. Каждое утро в парламенте Табулистана начинается со следующей процедуры. Каждому из 2015 депутатов президент наклеивает на лоб бумажку со произвольным натуральным числом от 1 до 2015 (одно и то же число может быть написано на нескольких бумажках). Депутаты видят числа на лбах у коллег, но не видят своего. Потом одновременно каждый вслух говорит, какое число, по его мнению, написано у него на лбу. Если хотя бы один угадал, то парламент расходится отдыхать. Могут ли депутаты заранее договориться так, чтобы вообще не работать?

Решение. Докажем, что могут. Пронумеруем депутатов числами от 0 до 2014. Стратегия будет такой: депутат с номером i считает сумму S_i чисел на лбах остальных депутатов и называет число от 1 до 2015 так, чтобы в сумме с S_i оно давало остаток i при делении на 2015. Это возможно, причем единственным образом, так как среди чисел от 1 до 2015 встречаются все остатки от деления на 2015 и ровно по одному разу.

Докажем, что следуя такой стратегии, депутаты никогда не будут работать. Пусть сумма чисел на колпаках равна S и даёт при делении на 2015 остаток i . Заметим, что в этом случае i -ый депутат назовет свое число правильно.

Ответ. Да, смогут.

5. Строчку, в которой выписаны ровно по одному разу все натуральные числа от 1 до n , будем называть *ненаглядной*, если для любого k выполнено одно из условий:

- (а) k написано первым;
- (б) среди чисел, написанных левее k встречается или $(k - 1)$, или $(k + 1)$.

Найдите число всех ненаглядных строк длины n .

Решение. Докажем, что ненаглядные строки длины n находятся во взаимно однозначном соответствии со строками из нулей и единиц длины $n - 1$. Отсюда будет следовать, что их всего 2^{n-1} штук.

Возьмем произвольное число k , стоящее не на первом месте, и проведем от него стрелочки к тем из чисел $k - 1$ и $k + 1$, что стоят левее него. Из всех чисел кроме первого выходит хотя бы одна стрелочка, то есть всего не менее $n - 1$ стрелочки. С другой стороны, ни в одно число кроме первого не могут входить сразу две стрелочки. Если же на первом месте 1 или n , то и в него не более одной. В 1 и в n , стоящие не на первом месте, вообще не может входить стрелочек. Таким образом, получается, что стрелочек не больше $n - 1$. Значит всего ровно $n - 1$ стрелочка. Отсюда следует, что весь наш ориентированный граф представляет собой объединение двух цепочек (одна из которых может

иметь нулевую длину), сходящихся к первому числу. В одной из цепочек числа все время уменьшаются и она имеет вид $n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots$, а в другой увеличиваются и она имеет вид $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$. Заменяем каждое из чисел кроме первого на единицу, если оно принадлежит первой цепочке, и на ноль в противном случае. Получим как раз строку из нулей и единиц длины $n-1$.

Теперь несложно предъявить и обратную конструкцию. Пусть нам дана строка из $n-1$ нулей и единиц и единиц в ней k штук ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Рассмотрим все единицы и, идя справа налево, заменим их на $n, n-1, n-2, \dots, n-k+1$ (при $k = 0$ получится пустое множество чисел). Идя справа налево, заменим нули на $1, 2, \dots, n-k-1$ (при $k = n-1$ получится пустое множество чисел). Оставшееся неиспользованным число $n-k$ допишем в начало. Легко видеть, что такая строка является ненаглядной.

Ответ. 2^{n-1} .