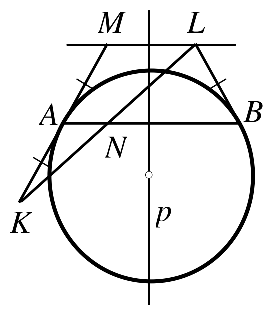
VIII командно-личный турнир «Математическое многоборье»

2–7 ноября 2015 года, г. Москва

Геометрия (решения)

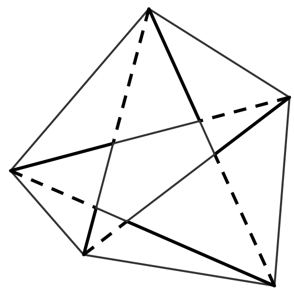
Младшая лига

1. Дана окружность и ее хорда AB. В концах хорды к окружности проведены касательные и на них отложены равные отрезки AK и BL, лежащие по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямая AB делит отрезок KL пополам.

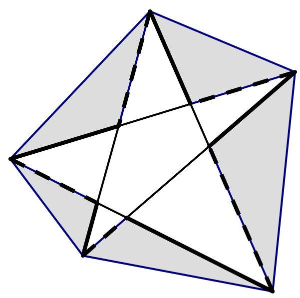


Решение. Продолжим отрезок KA за точку A отрезком $AM = AK$ (см. рисунок). Симметрия относительно серединного перпендикуляра p к AB переводит окружность в себя, а точку A – в точку B. Поэтому касательная в точке A перейдет в касательную в точке B, а значит, точка M – в точку L. Следовательно, прямая ML перпендикулярна к p, т.е. параллельна AB. Теперь из теоремы Фалеса следует, что $KN = NL$ (N – точка пересечения AB и KL). Отметим, что если взять данные отрезки достаточно длинными, то отрезок KL будет пересекать не саму хорду, а ее продолжение, но приведенное рассуждение при этом сохранит силу.

2. Рассмотрим пятиугольную звезду, образованную диагоналями произвольного выпуклого пятиугольника. Обведем 10 звеньев ее внешнего контура поочередно сплошными и пунктирными линиями (см. рисунок). Докажите, что произведение длин сплошных звеньев равно произведению длин пунктирных звеньев.



Решение. Рассмотрим треугольники, каждый из которых образован одной стороной исходного пятиугольника и двумя звеньями контура звезды. На каждой диагонали отношение ее пунктирного отрезка к сплошному равно отношению площадей опирающихся на них треугольников. В произведении всех таких отношений все площади сокращаются, и получаем, что оно равно 1, т.е. произведения отрезков каждого типа равны.



Другое решение получится, если применить теорему синусов к каждому треугольнику-«лучу звезды» и заменить отношение его сплошной и пунктирной сторон отношением синусов соответствующих углов.

3. На биссектрисах углов A, B, C, D выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A', B', C', D' соответственно так, что прямая $A'B'$ параллельна AB, прямая $B'C'$ параллельна BC и прямая $C'D'$ параллельна CD. Докажите, что а) (3 б.) прямая $D'A'$ параллельна DA; б) (4 б.) если дополнительно известно, что $A'C' \parallel BD$, то и $B'D' \parallel AC$.

Решение.

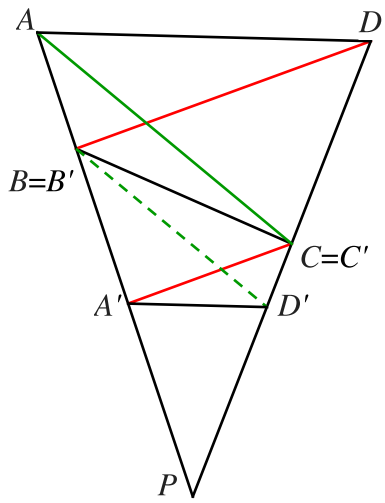
а) Обозначим через $d(X, YZ)$ расстояние от точки X до прямой YZ. Тогда $d(A', AD) = d(A', AB)$ (т.к. точка A' лежит на биссектрисе угла DAB), а $d(A', AB) = d(B', AB)$ (т.к. $A'B' \parallel AB$). Продолжая эту цепочку равенств аналогичным образом, получим:

$d(A', AD) = d(A', AB) = d(B', AB) = d(B', BC) = d(C', BC) = d(C', CD) = $ $= d(D', CD) = d(D', AD)$.

Следовательно, точки A' и D' равноудалены от прямой DA, а значит прямые $A'D'$ и AD параллельны.

б) Докажем, что если стороны четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно параллельны и диагональ AC первого четырёхугольника параллельна диагонали $B'D'$ второго, то и вторые их диагонали параллельны.

Заметим, что условия параллельности однозначно задают четырёхугольник $A'B'C'D'$ с точностью до подобия, т.к. они задают углы треугольников $A'B'C'$ и $A'D'C'$. Поэтому достаточно доказать утверждение для какого-то одного четырёхугольника $A'B'C'D'$, удовлетворяющего условию. Построим его так: возьмем $B'=B$, $C'=C$, проведем из C прямую, параллельную BD, до пересечения с продолжением AB в точке A', а из A' – прямую, параллельную DA, до пересечения с продолжением DC в точке D'. Если четырёхугольник $ABCD$ – не параллелограмм, то какие-то две его противоположные стороны – пусть это будут AB и CD – при продолжении пересекаются в некоторой точке P. Тогда из параллельности AD и $A'D'$ следует, что



$$PA' : PA = PD' : PD,$$

а из параллельности BD и $A'C'$ следует, что

$$PB : PA' = PD : PC.$$

Перемножая эти равенства, получаем, что $PB : PA = PD' : PC$. По теореме, обратной к усиленной теореме Фалеса, $B'D'$ и AC параллельны.

Если $ABCD$ – параллелограмм, то такое же построение даст параллелограмм $BCD'A'$, при этом и четырёхугольник $BDCA'$ будет параллелограммом. Отсюда следуют равенства длин $AB = DC = BA' = CD'$. Таким образом, отрезки AB и CD' равны и параллельны; значит, $ABD'C$ – тоже параллелограмм и $B'D' \parallel AC$.

4. Угол B треугольника ABC вдвое больше угла C. Окружность радиуса AB с центром A пересекает серединный перпендикуляр к отрезку BC в точке D, лежащей внутри угла BAC. Докажите, что $\angle DAC = \frac{1}{3}\angle A$.

Решение. Проведем из точки A параллель к BC и обозначим через K точку ее пересечения с биссектрисой угла B. Тогда

$$\angle AKB = \angle KBC = \angle KBA = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle C = \angle CAK,$$

причем точка K симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к BC (т.к. это имеет место для прямых BK и CA). Следовательно,

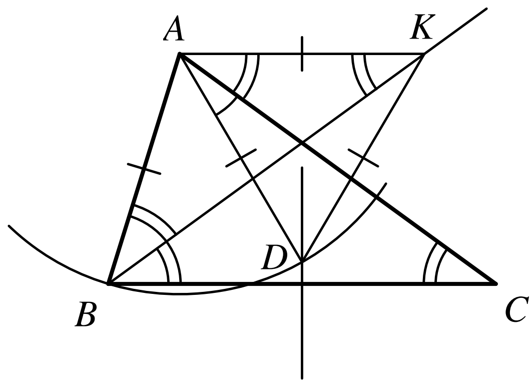
$$KD = AD = AB = AK$$

(последнее равенство вытекает из того, что ABK – равнобедренный треугольник), т.е. треугольник AKD равносторонний. Отсюда имеем:

$\angle DAC = \angle DAK - \angle CAK = 60° - \angle C$.

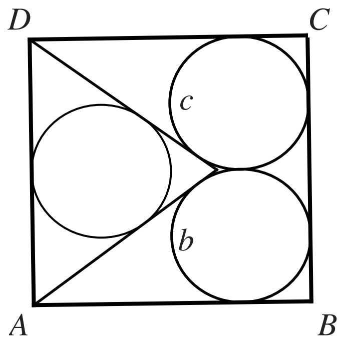
С другой стороны,

$\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 3\angle C = 3\angle DAC$.



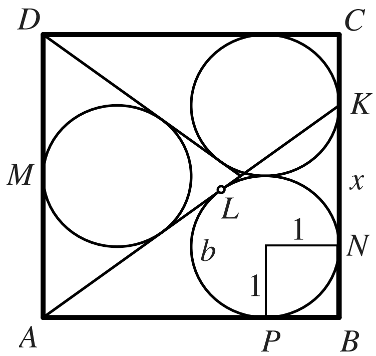
Старшая лига

1. В углы B и C квадрата $ABCD$ вписаны две равные окружности b и c, касающиеся друг друга. Из вершины A проведена касательная к окружности b, а из D – к c (см. рисунок). Докажите, что радиус окружности, вписанной в треугольник, образованный этими касательными и стороной AD, равен радиусу данных окружностей.



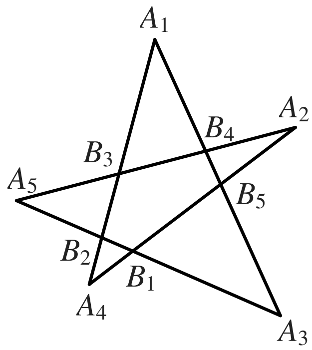
Решение. Пусть радиус данных окружностей равен 1, тогда сторона квадрата равна 4. Продолжим касательную к окружности b до пересечения со стороной BC в точке K. Поскольку углы AKB и KAD равны, достаточно доказать, что равны и расстояния от их вершин K и A до точек касания N и M вписанных в них окружностей с прямыми KB и AD, т.е. что $KN = 2$ (очевидно, что третья окружность касается стороны AD в ее середине M и $AM = 2$). Обозначим через L и P точки касания окружности b с отрезками AK и AB. Очевидно, $BP = BN = 1$, $AL = AP = 4 - 1 = 3$; пусть $KN = KL = x$. Удвоенную площадь прямоугольного треугольника AKB можно записать двумя способами – как произведение катетов: $AB\cdot KB = 4(1 + x)$ и как произведение периметра на радиус вписанной окружности:

$(AB + BC + CA)\cdot 1 = 4 + (1 + x) + (3 + x) = 8 + 2x$.

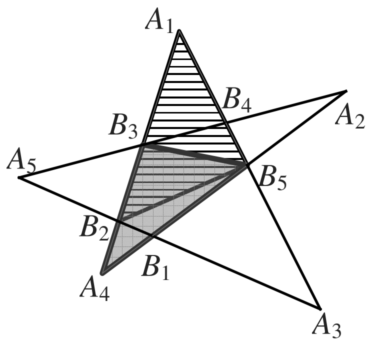


Отсюда получаем уравнение $4 + 4x = 8 + 2x$ и находим $x = 2$, что и требовалось.
Имеются и другие решения. Например, уравнение для радиуса r третьей окружности можно получить, заметив, что $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle DAK = \frac{r}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BAK = \frac{1}{3}$ и что $\frac{1}{2}(\angle DAK + \angle BAK) = 45°$.

2. а) Дана «пентаграмма» $A_1A_2A_3A_4A_5$ – замкнутая самопересекающаяся пятизвенная ломаная (см. рисунок). Пусть B_1, B_2, …, B_5 – точки пересечения ее несмежных звеньев: B_n – точка пересечения A_iA_{i+1} и A_kA_{k+1}, где номера всех точек разные и считаем, что A_6=A_1. Докажите, что
$A_1B_2 \cdot A_2B_3 \cdot A_3B_4 \cdot A_4B_5 \cdot A_5B_1 = B_1A_2 \cdot B_2A_3 \cdot B_3A_4 \cdot B_4A_5 \cdot B_5A_1$.
б) Докажите, что это равенство остается верным для любой замкнутой ломаной $A_1A_2A_3A_4A_5$, не имеющей параллельных звеньев, если определить точки B_n как точки пересечения тех же звеньев, что и в п. а), или их продолжений.



Решение. а) Поделим обе части доказываемого равенства на его правую часть и разложим полученную левую часть в произведение пяти дробей, в числителе и знаменателе каждой из которых стоят два (перекрывающихся) отрезка одного звена. Заменим каждую дробь отношением площадей двух треугольников с общей высотой, основаниями которых служат отрезки в числителе и знаменателе:



$\frac{A_1B_2}{B_3A_4} = \frac{S_{B_5A_1B_2}}{S_{B_5B_3A_4}}$, $\frac{A_2B_3}{B_4A_5} = \frac{S_{B_1A_2B_3}}{S_{B_1B_4A_5}}$ и т.д.

Во всех пяти дробях каждая площадь встретится дважды – один раз в числителе, другой – в знаменателе, поэтому их произведение равно 1.
б) Решение дословно повторяет решение а).
Замечание: Задачу можно решить и с помощью теоремы синусов; ср. решение задачи 2 младшей лиги, которая получается из рассмотренной выше в случае, когда $A_1…A_5$ – выпуклый пятиугольник (а именно, центральный пятиугольник пентаграммы).

3. На плоскости отмечены точки A_1, A_2, ..., A_n и B так, что никакие три из этих $n + 1$ точек не лежат на одной прямой. Известно, что для любых двух точек A_i и A_j можно выбрать третью точку A_k так, что точка B окажется внутри треугольника $A_iA_jA_k$. Докажите, что число n нечётно.

Решение. Проведём лучи BA_1, ..., BA_n и покрасим их в синий цвет; проведём также продолжения этих лучей и покрасим их в красный цвет. Из условия задачи следует, что никакие два синих луча не являются соседними, т.е. между ними есть красный луч. Действительно, пусть BA_i и BA_j − синие лучи, между которыми нет красного луча. Это означает, что угол, сторонами которого служат продолжения лучей BA_i и BA_j, не содержит точек A_k, поэтому нельзя выбрать третью точку A_k так, чтобы точка B оказалась внутри треугольника $A_iA_jA_k$.

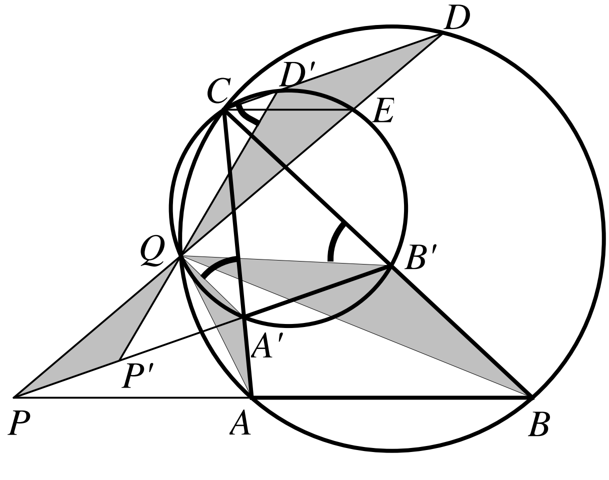
Рассмотрим на плоскости любые n прямых, проходящих через одну точку. Эта точка разбивает каждую прямую на два луча, и мы покрасим один из них синим цветом, а другой красным. Докажем, что чётность числа пар соседних синих лучей противоположна чётности числа n. Применим индукцию по n. При $n = 2$ имеется ровно одна пара соседних синих лучей. Если у нас уже есть несколько прямых и мы проводим ещё одну прямую и раскрашиваем образовавшиеся лучи, то возможны три случая: новый синий луч может пройти между двумя «старыми» синими лучами, между двумя красными и между синим и красным. В первых двух случаях число соседних синих пар увеличится на 1, в третьем – уменьшится (новый красный луч разделит два старых синих). Таким образом, четность числа синих «соседей» изменяется вместе с четностью n.

В нашей задаче соседних синих лучей нет; значит, число n нечётно.

4. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки B' и A'. Описанная окружность треугольника ABC вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную $A'B'$, в точке D. Описанная окружность треугольника $A'B'C$ вторично пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB, в точке E. Докажите, что прямые AB, $A'B'$ и DE пересекаются в одной точке.

Решение.

Приведем решение, использующее *поворотную гомотетию* – результат поворота и гомотетии с общим центром, выполненных последовательно.



Обозначим через Q и D' «вторые» (т.е. отличные от C) точки пересечения окружности $CA'B'$ с окружностью CAB и с прямой CD соответственно (см. рисунок). Треугольники QAA', QBB' и QDD' подобны друг другу по двум углам: их углы при вершинах A, B и D равны как вписанные в окружность ABC и опирающиеся на одну и ту же дугу CQ; по аналогичной причине равны их внешние (а значит, и внутренние) углы при вершинах A', B' и D' (они вписаны в окружность $A'B'C$). Следовательно,

$$\angle AQA' = \angle BQB' = \angle DQD' \text{ и } QA' : QA = QB' : QB = QD' : QD.$$

Поэтому при поворотной гомотетии F, состоящей из поворота вокруг Q на угол $\alpha = \angle AQA'$ и гомотетии относительно Q с коэффициентом $k = QA' : QA$, точки A, B, D перейдут в A', B', D' соответственно. Отметим, что прямая AB переходит в $A'B'$.

Отсюда, во-первых, следует, что угол между прямыми AB и $A'B'$ равен углу поворота α, а значит, и угол между параллельными им прямыми CE и CD тоже: $\angle DCE = \angle D'CE = \alpha$. Углы $D'CE$ и $D'QE$ вписаны в окружность $A'B'C$ и опираются на одну дугу $D'E$, поэтому $\angle D'QE = \angle D'CE = \alpha = \angle D'QD$. А это значит, что точки Q, D и E лежат на одной прямой.

Пусть P – точка пересечения этой прямой с прямой AB. Тогда ее образ $P' = F(P)$ лежит на образе прямой AB, т.е. на прямой $A'B'$. При этом треугольник QPP' подобен треугольнику QDD' (т.к. $\angle PQP' = \alpha = \angle DQD'$ и $QP' : QP = k = QD' : QD$), поэтому $\angle QPP' = \angle QDD'$, и следовательно, прямая PP' параллельна DD'. Но точка P' лежит на $A'B'$, а по условию прямые $A'B'$ и DD' параллельны. Отсюда следует, что прямые PP' и $A'B'$ совпадают, т.е. три прямые – $A'B'$, AB и DQ проходят через точку P.

Это доказательство можно изложить, и пользуясь только теоремой о вписанном угле, если ввести на чертеже вспомогательные окружности.