VIII командно-личный турнир «Математическое многоборье»

2–7 ноября 2015 года, г. Москва

Алгебра и теория чисел (решения)

Младшая лига

1. Есть набор из нескольких натуральных чисел. Все числа удвоили, и оказалось, что множество их первых цифр не изменилось. Какое наименьшее количество чисел могло быть в наборе?

Ответ: 3. Пусть число N начинается на a; будем называть *a началом N*. Если a = 1, 2, 3, 4, то $2N$ начинается на $2a$ или $2a + 1$, т.е. первая цифра увеличивается. Если $a > 4$, то число $2N$ начинается на 1. Возьмем наименьшую из первых цифр чисел набора, за ней напишем первую цифру удвоенного числа и т.д. Эта цифры не могут на каждом шагу расти, а уменьшение всегда дает 1. Следовательно, в набор входит *не менее* трех чисел: число N, начинающееся на 1, число M, начинающееся так же, как $2N$, и число, начинающееся так же, как $2M$ (оно не может быть равно 1). Пример набора *ровно* из трех чисел – 15, 3, 6.

2. Найдите все натуральные числа a и b, такие что число $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}$ тоже натуральное.

Ответ: (a; b) = (1; 1), (4 2). При $b = 1$ число $1/a$ должно быть целым, следовательно, $a = 1$. При $b \geq 2$ сумма двух последних слагаемых не больше 3/4, поэтому единственное целое значение. Которая может принимать вся сумма – единица. В частности, при $b = 2$ получаем, что $1/a = 1/4$ и $a = 4$. а при $b > 2$ имеем: $1/a \geq 1 - 4/9 = 5/9 > 1/2$, что невозможно.

3. Решите в действительных числах уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 0$, $z = \sqrt{2}$. Заметим, что $x^2+\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2+y^2+\left(\sqrt{2-z^2}\right)^2+z^2+\left(\sqrt{3-x^2}\right)^2=6$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $\left(x-\sqrt{1-y^2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2-z^2}\right)^2+\left(z-\sqrt{3-x^2}\right)^2=0$. Это равенство возможно, только если каждое слагаемое в его левой части равно 0, что влечет условия $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 + z^2 = 2, \\ z^2 + x^2 = 3. \end{cases}$$

Для ее решения складываем каждые два уравнения и вычитаем третье.

4. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций +, –, ×, : и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

Ответ: да. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ – данный набор цифр. Двигаясь от a_1 к a_{25}, будем вставлять между цифрами a_i и a_{i+1} знак +, если алгебраическая сумма s_i уже пройденных цифр $a_1, a_2, \ldots, a_i$ отрицательна, и знак –, если $s_i \geq 0$. Очевидно, что все s_i лежат в промежутке [–9; 9]. Так как сумм всего 25, и все они целые, то по принципу Дирихле среди них найдутся две одинаковые: $s_i = s_j$, где $i < j$. Это означает, что знаки перед цифрами $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$ поставлены так, что алгебраическая сумма этих цифр равна 0. Заключим эту сумму в скобки и умножим её на все остальные цифры; получится выражение, значение которого равно 0. (Чтобы перед первым членом в скобке не пришлось вставлять две операции – умножение и вычитание (и скобку между ними), знаки всех цифр, попавших в скобку, нужно заменить противоположными.)

Старшая лига

1. Назовем два натуральных числа *соседними*, если их десятичные записи отличаются только одной цифрой в одном из разрядов (например, числа 23578 и 23478 – соседние). Какое наибольшее количество n-значных чисел можно выбрать так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: $9 \cdot 10^{n-2}$. Очевидно, что в каждом десятке чисел (от $10N$ до $10N + 9$) любые два числа соседние. Поэтому в искомый набор может войти не более одного числа из каждого десятка. Ниже мы покажем, как выбрать в каждом десятке одно число, чтобы в полученном наборе не было соседних. Тем самым, ответ – это количество десятков n-значных чисел, т.е. количество $(n – 1)$-значных чисел, равное $9 \cdot 10^{n-2}$.

Выберем в каждого десятке число, сумма цифр которого делится на 10; это можно сделать, т.к. последние цифры чисел десятка принимают все значения от 0 до 9. Среди выбранных чисел соседних не будет, потому что любые два различных соседних числа при делении на 10 дают разные остатки.

2. Решите уравнение $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Ответ: $x = 5/4$, $5/3$.

Положим $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, тогда $x^2y^2 = x^2 + y^2$ и $xy > 0$. По условию, $x+y=\dfrac{35}{12}$, следовательно, $x^2+y^2+2xy=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$, т.е. $x^2y^2+2xy+1=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2+1$.

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $xy > 0$, получаем $xy=\dfrac{25}{12}$.

Теперь x и y легко найти, зная их сумму и произведение.
Другой способ решения – выполнить подстановку $x = \sec t$.

3. Найдите все натуральные числа a, b, c, удовлетворяющие условию

$$a^b + b^c = abc.$$

Ответ: (1; 1; 2), (2; 2; 2), (2; 2; 3), (4; 2; 3), (4; 2; 4).
1) При $b = 1$ получаем уравнение $a + 1 = ac \Rightarrow a(c-1) = 1 \Rightarrow a = 1$, $c = 2$.
2) При $b = 2$ уравнение принимает вид $(a-c)^2 + 2^c = c^2$. При $c = 1$ решений оно не имеет, а подставляя $c = 2, 3, 4$, получим решения (2; 2; 2), (2; 2; 3) и (4; 2; 3), (4; 2; 4) соответственно. При $c > 4$ решений нет, т.к. в этом случае $2^c > c^2$ (доказательство по индукции).
3) Остается случай $b \ge 3$. При $a = 1$, деля обе части данного уравнения на b, получаем уравнение $b^{c-1} = c - 1/b$, которое, очевидно, не имеет натуральных решений. Пусть далее $a \ge 2$. Докажем, что для этих a, $b \ge 3$ и $c \ge 1$ выполняются неравенства $a^b \ge \dfrac{2}{3}a^2b$ и $b^c \ge \dfrac{2}{3}bc^2$. Первое неравенство:

$$a^b = a^{b-2}a^2 \ge 2a^2 \ge \frac{2}{3}a^2b.$$

Второе неравенство проверяется непосредственно при $c \le 3$, а при $c \ge 4$ имеем:

$$b^c \ge b\cdot 3^{c-1} = \frac{b}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^c \cdot 2^c > \frac{2}{3}b\cdot 2^c \ge \frac{2}{3}bc^2.$$

Наконец, применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, убеждаемся, что в рассматриваемом случае левая часть уравнения больше правой, т.е. решений нет:

$$a^b + b^c \ge \frac{2}{3}b(a^2+c^2) \ge \frac{4}{3}bac > abc.$$

4. Назовем «экономным» многочлен с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент единица, а набор остальных коэффициентов, включая нулевые, совпадает с набором его корней с учетом кратности, то есть если число a встречается среди коэффициентов m раз, то a является корнем многочлена кратности m. Найдите все экономные многочлены n-ой степени для а) (1 б.) $n = 2$, б) (2 б.) $n = 3$, в) (4 б.) $n = 4$. (Число x_0 – корень кратности m многочлена $P(x)$, если $P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$, где $Q(x_0) \neq 0$.)

Ответ: а) x^2, $Q_2(x)$; б), в) x^n, $x^{n-2}Q_2(x)$ и $x^{n-3}Q_3(x)$ для $n = 2, 3$ соответственно.
Пусть $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_0$. Если среди коэффициентов a_i есть 0, то 0 – корень, поэтому $a_0 = 0$ и, если $a_i = 0$ при $i > k$, а $a_k \neq 0$, то $P_n(x) = x^{n-k}(x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k) = x^{n-k}Q_k(x)$. Заметим, что поскольку кратность корня 0 многочлена $P_n(x)$ равна $n - k$, коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$ не равны нулю, и следовательно, сам многочлен $Q_k(x)$ удовлетворяет условию задачи, т.е. ее достаточно решить для многочленов с ненулевыми коэффициентами.
Из разложения $Q_k(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$ получаем $a_k = (-1)^k a_1a_2\ldots a_k$. Отсюда $(-1)^{k-1}a_1a_2\ldots a_{k-1} = -1$, т.е. $a_i = \pm 1$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$, причем число p коэффициентов $+1$ должно быть нечетно, а значит, хотя бы один из них равен 1. Но тогда $Q_k(1) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$, т.е. $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = -1$.
С другой стороны, сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в двух выражениях для $Q_k(x)$, получаем, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = -a_1$ и, следовательно, $a_1 = 1$.
Кроме того, $a_k = -1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) = -1 - (p - (k - 1 - p)) = k - 2p - 2$ и для $Q_k(x)$ получаем равенство

$$Q_k(x) = (x - 1)^p(x + 1)^{k-1-p}(x - (k - 2p - 2)).$$

Рассмотрим разные значения k.
1) $k = 0$. Тривиальный подходящий случай: $P_n(x) = x^n$.
2) $k = 1$. $Q_1(x) = x + a_1 = x + 1$; не подходит, т.к. $Q_1(1) \neq 0$.
3) $k = 2$. Тогда $p = 1$ и

$$Q_2(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2.$$

4) $k = 3$. Тогда снова $p = 1$ (т.к. $p \leq k - 1$ и нечетно) и

$$Q_3(x) = (x - 1)^1(x + 1)^1(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

5) $k = 4$. Тогда $p = 1$ или $p = 3$.
При $p = 1$ имеем: $a_4 = k - 2p - 2 = 0$, что невозможно (т.к. $a_k \neq 0$).
При $p = 3$ имеем: $a_4 = -4$ и $Q_4(x) = (x - 1)^3(x + 1)^0(x + 4) = (x - 1)^3(x + 4)$.
Раскрывая скобки, найдем что коэффициенты при x^2 и x равны -9 и 11, что противоречит равенству $a_i = \pm 1$.
Отсюда немедленно получаем ответы на вопросы а), б), в).

Замечание. В действительности экономные многочлены степени n при любом $n \geq 3$ имеют вид x^n, $x^{n-2}Q_2(x)$ или $x^{n-3}Q_3(x)$. Для доказательства нужно раскрыть скобки в разложении, выразить a_2 через k и p, и убедиться, что (квадратные) уравнения для k, вытекающие из условия $|a_2| = 1$, не имеют корней.