~~Второй тур.~~ 10 класс.

1. Какая последняя цифра у числа $2^{2015}+3^{2015}$?

   Решение. Найдем сначала последние цифры слагаемых по отдельности. Последние цифры степеней как двойки, так и тройки зацикливаются.

   Посмотрим на степени двойки: $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$. Таким образом, последние цифры имеют пероид 4 и на 2015-ом месте будет стоять цифра 8.

   Посмотрим на последние цифры степеней тройки: $3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$. Они имеют период 4 и на 2015-ом месте будет стоять цифра 7.

   Сложив числа с последними цифрами 7 и 8, получим число с последней цифрой 5.

   Ответ: 5.

2. Вневписанная окружность радиуса 5 касается стороны AB треугольника ABC. Площадь ABC равна 15, а периметр равен 14. Чему равна AB?

   Решение. Обозначим центр вневписанной окружности через O, а радиус через r ($r=5$ по условию). Площадь треугольника ABC может быть выражена следующим образом:

$$15 = S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC} - S_{OAB} = \frac{1}{2}\left(rAC + rBC - rAB\right) = \frac{1}{2}(rP - 2rAB) = 2.5 \cdot 14 - 5AB$$

   Отсюда $AB = 4$

   Ответ: 4.

3. Сколькими способами можно рассадить 10 партизан в две землянки так, чтобы в каждой землянке сидело хотя бы трое? (все партизаны считаются разными)

   Решение. Посчитаем, сколькими способами можно рассадить партизан без учета условия на количество в каждой землянке. Так как каждого из них можно посадить в одну из двух землянок, всего это можно сделать 2^{10} способами.

   Есть две ситуации, когда все сидят в одной землянке, так как землянок всего две.

   Посчитаем рассадки, когда в одной из землянок ровно один человек. Пусть он в первой землянке, тогда его выбираем десятью способами, а остальных сажаем во вторую. Прибавляя варианты для другой землянки, получаем 20 вариантов.

   Посчитаем рассадки, где в одной из землянок 2 человека. Пусть они сидят в первой землянке. Выбрать их можно $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ способами. Столько же для второй землянке.

   Вычитая неподходящие варианты, получаем $1024 - 2 - 20 - 90 = 912$.

   Ответ. 912.

4. Чему равна сумма длин отрезков, являющихся решениями системы из двух неравенств: $\sin 3\pi x + \sin 5\pi x \geqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1000$?

   Решение. Преобразуем первое неравенство:

$$\sin 3\pi x + \sin 5\pi x = 2\cos 4\pi x \sin \pi x \geqslant 0$$

   Таким образом неравенство верно, если одно из выражений $\sin \pi x$ и $\cos 4\pi x$ равно нулю, или они имеют одинаковый знак. Эти функции имеют периоды 2 и $\frac{1}{2}$ соответственно, поэтому достаточно посчитать суммарную длину решений на отрезке $[0, 2]$, а потом умножить её на

500. Функция $\sin \pi x$ положительна на $(0,1)$ и отрицательна на $(1,2)$. Функция $\cos 4\pi x$ положительна на $\left[0, \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $\left(\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right)$ и $\left(\frac{15}{8}, 2\right]$. Суммарная длина интеравлов, на которых произведение $\sin \pi x \cdot \cos 4\pi x$ положительно, равна 1. Таким образом, ответ 500.

Ответ. 500.

5. Имеются квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что уравнение $f(g(x)) = 0$ имеет четыре корня: 3, 14, 15 и a. Какое наибольшее возможное значение a?

   Решение. Рассмотрим корни x_1 и x_2 уравнения $f(x) = 0$. Тогда корни уравнения $f(g(x)) = 0$ — это объединение множества корней уравнения $g(x) = x_1$ и $g(x) = x_2$. Обозначим корни первого из них через y_1, y_2, а корни второго — через y_3, y_4.

   Пусть $g(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда по теореме Виета $y_1 + y_2 = y_3 + y_4 = \frac{-b}{a}$.

   Наибольшее a, для которого числа $3, 14, 15$ и a можно разбить на две пары с равной суммой — это 26.

   Трехчлены с такими корнями строятся без труда.

   Ответ. 26.

6. В остроугольном треугольнике XYZ высота XA равна медиане YB. Найдите угол BYZ (в градусах).

   Решение. Продлим отрезок YB за точку B на его длину и получим точку Y_1. В четырехугольнике YZY_1X диагонали делятся точкой пересечения пополам, поэтому он является параллелограммом. Опустим из Y_1 перпендикуляр Y_1A_1 на прямую YZ. В силу параллельности XY_1 и YZ, $XA = Y_1A_1$. В прямоугольном треугольнике YY_1A_1 гипотенуза YY_1 в два меньше катета Y_1A_1, то есть угол $Y_1YA_1 = 30°$. Так как угол XYZ острый, $\angle Y_1YA_1 = \angle BYZ$.

   Ответ. 30.