Классные уроки: Цепные дроби.

В.В. Вавилов

Тот жалкий срок, пока еще не спят
Земные чувства, их остаток скудный
Отдайте постиженью новизны,
Чтоб солнцу вслед увидеть мир безлюдный.
Подумайте о том, чьи вы сыны!
Вы созданы не для животной доли,
А к доблести и к знанью рождены.
Данте Алигьери «Божественная комедия»

В первой части (п. 1) изложены основные теоретические сведения, некоторые важные формулы и примеры. Пункты 2—8 посвящены мотивировкам и разбору примеров прикладного характера, подчерчивающие важность теории цепных дробей в современной математике и её приложениях. Заключительный пункт 9 содержит перечень задач, составляющий обязательный минимум для всех учащихся двухгодичного физико-математического потока СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова; кроме того, он содержит также семь задач (для желающих), которые встречались на различных математических олимпиадах.

1. *Конечной цепной дробью* называется выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа; $a_1 \geq 1, \ldots, a_{n-1} \geq 1, \quad a_n > 1$, при этом, числа $a_к$ называются *неполными частными* (справа в этом равенстве — одно из возможных обозначений левой части).

Ясно, что конечная цепная дробь является рациональным числом. Тот факт, что верно и обратное утверждение, т.е. что любое рациональное число может быть представлено в виде конечной цепной дроби, вытекает из алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел.

Соглашение о том, что $a_n > 1$ обусловлено желанием *обеспечить взаимно-однозначное соответствие между всеми рациональными числами и конечными цепными дробями;* при отсутствии такого требования мы имели бы неоднозначность представления, как показывают следующие простые равенства:

$$[0;2] = [0;1,1]\ , [2;4,3] = [2;4,2,1],$$

Вообще, если $a_{n+1} > 1$, то

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - 1) + 1$$

и тем самым

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n - 1, 1]$$

Для данной цепной дроби её подходящей *k*-ой дробью, $0 < k < n$, называется выражение

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_k];$$

при $k = n$ получаем данную цепную дробь, а предыдущие получаются её «обрыванием» на том или другом неполном частном a_k. Каждое из этих выражений можно вычислить, т.е. свернуть в простую дробь; получающийся при этом ряд дробей называется *подходящими дробями* данной цепной дроби (или представляемого ею числа p/q); мы будем последовательно обозначать эти дроби через

$$P_0 / Q_0,\ P_1 / Q_1,\ P_2 / Q_2, \ldots, P_n / Q_n.$$

Использование в этом определении словосочетания «подходящая дробь» очень удачно, т.к. эти дроби действительно хорошо «подходят» для приближения чисел.

Так, в частности,

$$P_0 = a_0,\ P_1 = a_0 a_1 + 1,\ P_2 = (a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0,$$

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = a_1,\ Q_2 = a_1 a_2 + 1.$$

Более того, непосредственно из определения следует справедливость следующих рекуррентных соотношений

$$P_0 = a_0,\ P_{k+1} = a_{k+1} P_k + P_{k-1},$$
$$Q_0 = 1,\ Q_{k+1} = a_{k+1} Q_k + Q_{k-1},$$

для $k = \overline{1, n-1}$. Эти рекуррентные соотношения позволяют последовательно находить числители и знаменатели подходящих дробей по данной цепной дроби. Важно также отметить, что произвольно задавая последовательность чисел $a_0, a_1, a_2, ... = \{a_k\}_1^{\infty}$ и определяя по выписанным формулам числа P_k и Q_k для $k = \overline{1, n-1}$, мы не только получим все подходящие дроби, но и восстановим саму цепную дробь.

Из приведенных выше рекуррентных соотношений следует, что

$$a)\ P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = (-1)^k a_k,\ k \geq 2;$$

$$b) \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}},\ k \geq 1.$$

Для данного рационального числа p/q его разложение в конечную цепную дробь можно получить также при помощи следующего процесса (получение «достатка» и «обращение остатка»), эквивалентного алгоритму Евклида. Сначала выделим целую часть, выбрав целое число a_0 так, что

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, a_0 - \textit{целое},$$

где $\alpha_1 > 1$. Если α_1 — не целое, то продолжим процесс дальше. Представим α_1 в виде

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2},$$

где a_1 — целое, положительное и $\alpha_2 > 1$. Таким образом,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

Если α_2 — не целое, то можно продолжить процесс дальше. Поступая таким образом, на шаге с номером k получаем подходящую дробь P_k / Q_k, $k = \overline{0, n-1}$; при этом, $P_n / Q_n = p / q$.

Например, для числа 53/37 сначала представляем его в виде суммы целой части (достатка) и дробной (остатка):

$$\frac{53}{37} = 1 + \frac{16}{37}.$$

Остаток можно записать в виде дроби

$$\frac{1}{37/16},$$

причем знаменатель этой дроби больше единицы. Теперь аналогичные действия проделаем с числом 37/16:

$$\frac{37}{16} = 2 + \frac{1}{16/5}$$

и так как

$$\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5},$$

то

$$\frac{53}{37} = 1 + \frac{16}{37} = 1 + \frac{1}{37/16} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{16/5}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} = [1; 2, 3, 5].$$

2. Приём представления рационального числа в виде конечной дроби, описанный выше, носит общий характер и может быть распространен и на иррациональные числа. Разложим, например, число $\sqrt{2}$ в цепную дробь (которая, естественно, конечной быть не может, т.к. будет соответствовать иррациональному числу). Выделим целую часть:

$$a_0 = [\sqrt{2}] = 1, \ \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Отсюда получаем:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1, \ a_1 = [\sqrt{2} + 1] = 2,$$

$$\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}, \ \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Таким образом, $\alpha_2 = \alpha_1$; поэтому $\alpha_3 = \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_3$ и так далее. Тем самым, $a_2 = a_1 = 2$, $a_3 = a_2 = 2$ и так далее. Искомое разложение имеет вид

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}=[1;2,2,2,\ldots].$$

Аналогично, для числа $\sqrt{5}\approx 2,236\ldots$. Его целая часть равна 2, следовательно, остаток равен $\sqrt{5}-2$. После обращения остатка выражение принимает вид

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1/(\sqrt{5}-2)}.$$

Умножим числитель и знаменатель внутренней дроби на $\sqrt{5}+2$:

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1/(\sqrt{5}-2)}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}}=2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}.$$

Если в правой части последней формулы вместо $\sqrt{5}$ подставить саму её «бесконечное число раз», то получим

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}.$$

3. Проектируя различные механизмы и их детали (луноходов, роботов и пр.), приходится решать типичную задачу о расчете зубчатой передачи из двух шестеренок с коэффициентом передачи (отношением угловых скоростей), близким, например, к числу $\sqrt{2}=1,414213\ldots$.

Сделав на одной шестеренке 14 зубьев, а на второй 10 зубьев, коэффициент передачи будет равен k = 1,4. Это достаточно грубое приближение к числу $\sqrt{2}$. Если же на одной шестеренке будет 14142 зуба, а на другой 10000 зубьев, то получается более точное приближение для коэффициента $k=1{,}1442$. Однако, с технической точки зрения рост числа зубьев у шестеренок ведет к уменьшению их размеров и к потере прочности самой зубчатой передачи.

Зная разложение числа $\sqrt{2}$ в цепную дробь, попробуем рассмотреть её подходящие дроби. Имеем:

$$\frac{P_0}{Q_0}=1;\ \frac{P_1}{Q_1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5;\ \frac{P_2}{Q_2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}=1,4;\ \frac{P_3}{Q_3}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}=1,4166\ldots;$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}=1,4137\ldots;\quad \frac{P_5}{Q_5}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}=\frac{99}{70}=1,4142857\ldots.$$

Подходящая дробь P_5 / Q_5 уже эффективно конкурирует по точности с дробью 141142/10000; при этом, её числитель и знаменатель в 150 раз меньше. Поэтому в зубчатом механизме при заданном числе передачи $\sqrt{2}$ с высокой точностью обеспечат шестеренки с 99 и 70 зубьями.

4. Устройство нашего (григорианского) календаря основано на том, что Земля равномерно вращается вокруг своей оси, делая один оборот за сутки. Один круг обращения Земли вокруг Солнца составляет один год и этот год равен 365,24219878... суток.

По григорианскому календарю сохраняется чередование простых и високосных лет с использованием правила: если номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то этот год простой (годы 1700, 1800,1900 – простые, а 2000-й — високосный). В таком календаре средняя длина года составляет 365 суток 5 часов 49 минут 12 секунд, что всего на 12 секунд больше истинного значения длины года.Такая точность вполне приемлема с практической точки зрения, т.к. ошибка в 1 сутки возникает через 3300 лет.

Разберемся теперь проблему календаря с точки зрения цепных дробей. Выразим длину года в сутках и представим её в виде цепной дроби:

$$1\,\textit{год} = 365,242199... = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + ...}}}}\ \textit{суток}.$$

Последовательность подходящих дробей для неё начинается так

$$365;\ 365\frac{1}{4};\ 365\frac{7}{29};\ 365\frac{8}{33};\ 365\frac{31}{128};\ldots.$$

Если выбрать дробь $365\,{}^{1}\!/_{4}$, то в этом случае за 4 года набегает 1 «лишний» год — что соответствует юлианскому календарю. Если выбрать дробь $365\,{}^{8}\!/_{33}$, то за 33 года набежит 8 «лишних» лет; именно такое устройство календаря предлагал Омар Хайям (отметим, что такой календарь был бы точнее григорианского). Если же выбрать дробь $365\,{}^{31}\!/_{128}$, получим соответствующий ей календарь огромной точности, по которому средняя длина года лишь на 1 секунду превышала бы истинную. При таком устройстве календаря пришлось через каждые 128 лет пропускать один високосный год. Интересно, что по предложению немецкого ученого Иоганна Медлера (*нем. Johann Heinrich von Mädler*) вопрос о таком устройстве календаря (начиная с XX века) рассматривался в России, но оно распространения не получило. В физике цепные дроби впервые появились в астрономических исследованиях. Они использовались при вычислении затмений, движения планет и других периодических процессов в небесной механике.

5. Теория конструирования электрических цепей основана на двух законах:

а) если соединить последовательно несколько сопротивлений $R_1, R_2, \ldots, R_k$ последовательно (рис. 1), то общее сопротивление будет равно $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_k$

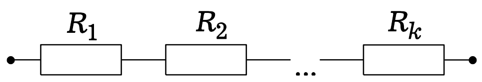

Рис. 1.

б) если соединить эти же сопротивления параллельно (рис. 2), то общее сопротивление окажется равным

$$R = \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_1} + \cfrac{1}{R_2} + \ldots + \cfrac{1}{R_k}}$$

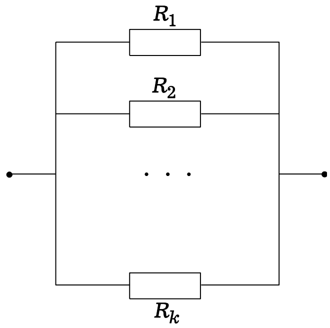

Рис. 2.

Задача. Пусть имеется большое количество единичных сопротивлений. *Можно ли из них составить схему, имеющую сопротивление 34/15 или вообще p/q, где p и q заданные натуральные числа?*

Ответ на такой вопрос, конечно, положительный, так как для любой дроби p/q можно сначала соединить параллельно q единичных сопротивлений, получив сопротивление, равное $1/q$, а затем размножить эту схему в p экземплярах, соединив их последовательно. Поступая таким образом, для конструирования цепи с общим сопротивлением 34/15 нам понадобятся $34 \times 14 = 510$ единичных сопротивлений (рис. 3).

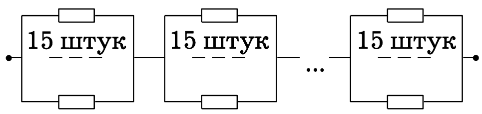

Рис. 3.

Для этого заметим, что

$$\frac{34}{15} = 2 + \frac{4}{15} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{15}{4}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{4}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}},$$

и используем это равенство для построения нужной электрической схемы, начиная «с нижнего этажа». Сначала соединим параллельно три сопротивления и добавим к этому блоку одно сопротивление (рис. 4); суммарно получим цепь с сопротивлением 4/3. Если теперь эту полученную схему соединить параллельно с блоком, который состоит из трёх сопротивлений, соединённых параллельно, то мы получим схему с общим сопротивлением 4/15. Осталось к этой схеме последовательно добавить два сопротивления. Проверьте правильность всех проделанных вычислений. Итак, мы сконструировали схему, состоящую из 9 единичных сопротивлений, общее сопротивление которой равно 34/15.

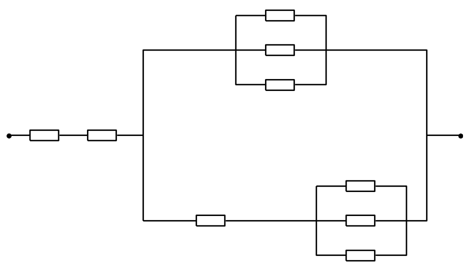

Рис. 4.

Разобранный пример приводит к следующим выводам. Предположим, что нужно составить цепь с сопротивлением p/q, где p и q — взаимно простые числа. Тогда представим число p/q в виде *конечной цепной дроби*, то есть в виде

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Из этого представления и описанного выше способа конструирования цепи, ясно, что для изготовления нужной цепи достаточно $E(p,q) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ сопротивлений. Отметим особо, что такой метод построения электрических цепей с заданным сопротивлением из единичных сопротивлений *не всегда приводит к минимально необходимому для этого единичных сопротивлений*. Так как

$$\frac{34}{15} = \frac{34}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} + \frac{8}{5} = \left(1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}\right) + \left(1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}\right),$$

то построим нужную схему (рис.5) с общим сопротивлением 34/15, состоящую из двух блоков, соединенных последовательно, а каждый блок сконструирован на основе тех представлений чисел 2/3 и 8/5 в виде цепных дробей, которые фигурируют в круглых скобках. Итак, получилась электрическая схема с общим сопротивлением 34/15, в которой занято только 8 единичных сопротивлений (ранее нам потребовалось для этого 9 сопротивлений).

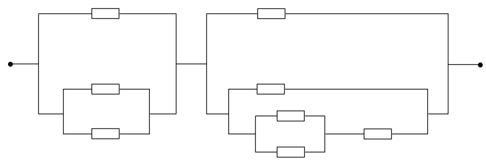

Рис. 5

6. Величина $E(p,q) = \sum_{k=0}^{n} a_k$, отвечающая представлению p/q в виде конечной цепной дроби, равна числу квадратов, на который разбивается прямоугольник размерами pxqпри помощи алгоритма Евклида.

Действительно, работу алгоритма Евклида можно представить следующим образом: в прямоугольник размерами $p \times q$ укладываем a_0 квадратов размерами $q \times q$, в оставшийся прямоугольник укладываем a_1 квадратов максимально возможных размеров и так далее, пока не покроем прямоугольник размера pxqквадратами (n+1) разных размеров в общем количестве равном $E(p,q)$.

Если считать целью алгоритма Евклида разбиение прямоугольника на квадраты, то он действует как «жадный» алгоритм: на каждом шаге помещает в прямоугольник квадрат наибольших размеров. (Термин «жадный алгоритм» употребляется в серьезном смысле и используется в литературе для обозначения подобного рода алгоритмов). На первый взгляд кажется, что он строит минимальное по числу квадратов разбиение. Но это не так (см. пример о конструировании электрической цепи с сопротивлением в 34/15 Ом).

Еще одной характеристикой $e(p,q)$ цепной дроби для числа p/q является её высота — число операций деления в её записи; в наших обозначениях $e(p,q)=n$.

Функция $e(p,q)$ ведёт себя нерегулярно и с трудом поддается исследованию. Используя программу (на основе алгоритма Евклида), которая обрабатывает массив всех целочисленных значений p и q в интервале от 0 до 100, удается подметить и некоторые свойства таблицы значений функции $e(p,q)$ — соответствующий фрагмент приведен ниже в Приложении. Можно, в частности, подметить, что:

1) в каждой строке таблицы ниже главной диагонали в каждом столбце таблицы числа повторяются периодически;

2) длина периода равна номеру строки;

3) в столбцах также наблюдаются периодические последовательности, длина периода которой которого равна номеру столбца.

Наиболее известным результатом общего характера о функции $e(p,q)$ остаётся, найденная Г. Ламе в первой половине XIX века, оценка:

$$e(p,q)\le\left[\log_{\varphi}\left(\sqrt{5}(\max(p,q)+1/2)\right)\right]-1$$

где $\varphi=(\sqrt{5}+1)/2$ — золотое сечение и $[a]$ — целая часть числа a. Отметим, что приведённая оценка точная (т.е. достигается). Само неравенство и его точность устанавливается с использованием последовательности чисел Фибоначчи $\{F_n\}$; точнее следующих двух её свойств (во второй формуле n делений):

$$F_n=\frac{\varphi^n-(-\varphi)^n}{\sqrt{5}},\quad \varphi=(\sqrt{5}+1)/2;$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots+\cfrac{1}{1}}}.$$

В описанной выше тематике много задач для самостоятельных исследований.

7[*]. Приведем здесь геометрическую реализацию алгоритма Евклида (приводящего к цепным дробям), которая по предложению известного российского математика Б.Н. Делоне, получила остроумное название *«алгоритм вытягивания носов»*.

Пусть даны прямая m, точка O на m исходящие из точки O и расположенные по разные стороны от прямой m два вектора $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$; при этом предполагается, что $\angle A_1OA_2<180$ и точка A_1 лежит от прямой m дальше, чем точка A_2.

Из точки A_1 отложим вектор $\overline{\alpha_2}=\overrightarrow{OA_2}$; из конца из конца этого вектора отложим ещё раз вектор $\overline{\alpha_2}$, и так далее, столько раз, сколько его можно отложить, не пересекая прямую m; пусть он отложился a_1 раз. Конец последнего отложенного вектора обозначим через A_3 и положим $\overline{\alpha_3}=\overrightarrow{OA_3}$. Из точки A_2 отложим вектор $\overline{\alpha_3}$ столько же раз, его можно отложить, не пересекая прямую m; пусть это будет a_2 раз. Получим точку A_4. Вектор $\overline{\alpha_4}=\overrightarrow{OA_4}$ откладывается от точки A_3 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы построены две ломанные: $A_1A_3A_5\dots$ и $A_2A_4A_6\dots$, которые охватывают прямую m с разных сторон (рис. 6). Может случиться, что какая-то из точек A_k попадает на прямую m и на этом процесс заканчивается; в противном случае — процесс бесконечен. Описанный процесс и называется *алгоритмом вытягивания носов*.

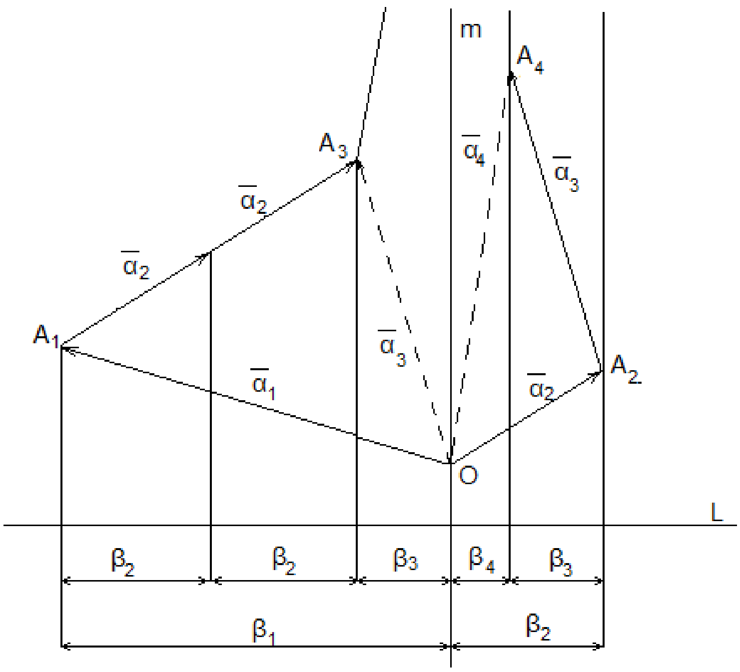

Рис.6

Спроектируем теперь все построения на прямую L, перпендикулярную к прямой m. Векторы спроектируются в отрезки, длины которых мы обозначим β_k, где $k = 1, 2, 3\ldots$, и для которых, как легко видеть, выполняется цепочка уравнений в алгоритме Евклида для чисел β_1 и β_2 — точнее, для поиска общей меры отрезков с такими длинами (рис 6).Действительно, имеем:

$$\begin{gathered}\beta_1 = a_1 \cdot \beta_2 + \beta_3 \\ \beta_2 = a_2 \cdot \beta_3 + \beta_4 \\ \beta_3 = a_3 \cdot \beta_4 + \beta_5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Поэтому

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

и, тем самым,

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}.$$

Такая интерпретация алгоритма Евклида позволяет привлечь для изучения теории цепных дробей геометрические средства; более того, она является одним из красивых инструментов так называемой геометрической теории чисел; подробности в [6].

8. Важной методом исследований в современной теории функций является возможность их представления в виде так называемых непрерывных дробей (более общих, чем цепные дроби).

Простой пример доставляет представление дробно-линейной функции в виде:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{-\frac{1}{c}+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\frac{d}{c}+x}}}},$$

где $c\neq 0, ad-bc=1.$

Это разложение имеет серьезные применения в теории геометрических преобразований плоскости.

Завораживающее разложение

$$tgx=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-...}}}}$$

виртуозно использовал Андриан—Мария Лежандр (1752—1833) при доказательстве иррациональности числа π.

9. Ниже приведен список задач (№№ 1—8), являющихся обязательным минимумом при изучении темы «Цепные дроби» для всех школьников двухгодичного физико-математического потока СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова, а также некоторые задачи, встречавшиеся в разные годы на математических олимпиадах (для заинтересовавшихся учеников.

Основные задачи

1) Разложить в цепную дробь числа 147/13, 129/111. *Ответ*: [11; 3,4], [1; 6,6].

2) Разложить в цепную дробь число α = 225/43 и найти все её подходящие дроби.

   Ответ: α =[5; 4,3,3]; P_0/Q_0 =5/1, P_1/Q_1 =21/4, P_2/Q_2 =68/13, P_3/Q_3 =225/43.

3) Разложить в цепную дробь числа $\sqrt{3},\sqrt{13},\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{30-\sqrt{3}}{13}.$

   Ответ: [1;1,2,1,2,1,2,…], [3; 1,1,1,1,6,1,1,1,1,6,..], [1;1,1,1,1,1,1,…] , [2;5,1,2,1,2,1,2,…].

4) Найдите наименьшее натуральное n, для которого существует такое натуральноеm, что

   a) $\sqrt{2}<\frac{m}{n}<\frac{297}{210};$

   b) $\sqrt{3}<\frac{m}{n}<\frac{220}{127}.$

   Ответ: b) m/n =97/56.

5) Найти числа, разлагающиеся в следующие бесконечные цепные дроби [0;1,2,3,1,2,3,…], [2;1,1,3,1,1,3,…]. *Ответ*: $(4+\sqrt{37})/7$, $(1+\sqrt{17})/2$.

6) Сократить с помощью разложения в цепную дробь α =7857/9153.

Ответ: α = 97/113.

7) Зная, что π = 3,1415…, выяснить, является ли дробь 22/7 подходящей дробью для разложения π в цепную дробь. *Ответ*: Да, является.

8) Разлагая число a/b в цепную дробь решить уравнения ax – by= 1, если

a) a= 101, b =13; *Ответ*: (4 + 13k; 31+101k), k∈$\mathbb{Z}$.
b) a = 79, b = 19; *Ответ*: (-6+19k;-19+79k), k∈$\mathbb{Z}$.
c) 18x +35y = 1; *Ответ*: (2+35k;-1-18k), k∈$\mathbb{Z}$.
d) 71x – 85y = 3; *Ответ*: (18+ 85k;15+ 71k), k∈$\mathbb{Z}$.

e*) Показать, что все целые решения уравнения $ax-by=c$ где *a, b c* — целые положительные числа, $(a,b)=1$, получаются по формулам

$$x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bk,\qquad y=(-1)^{n-1}cP_{n-1}+ak,\ k\in\mathbf{Z},$$

где P_{n-1}/Q_{n-1} — предпоследняя подходящая дробь разложения *a/b* в цепную дробь.

Дополнительные задачи

1. (Олимпиада «Ломоносов 2007/08». Найдите *k*, если

$$\text{а)}\ \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}=\sqrt{5}+2;\quad \text{б)}\ 4-\frac{1}{4-\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{2k-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}\ .$$

Ответ: а) $k=-1$; б) $k=1$.

2. Найти частное от деления на 2 числа (*n* двоек)

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\ddots}{\ +\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$$

Ответ: [1;4,1,4,…,].

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ — положительные числа. Сравните числа

$$1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_m}}}} \quad \text{и} \quad 1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Ответ: Если m чётно, то больше вторая дробь, если m нечётно, то — первая.

4. (Московская олимпиада, 1958). Решить в целых положительных числах уравнение

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{n}}}}}=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{x_n}}}}}.$$

Ответ: $x_1=1, x_2=1, x_k=k$, при $k=3,\dots n$.

5. (Олимпиада СССР,1985). Решите уравнение (в записи выражения, стоящего слева, фигурирует 1985 двоек)

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{\ddots}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1.$$

Ответ: $x=3$.

6. (Всероссийская олимпиада, 1988). Пусть

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{n}{m},$$

где n, m — натуральные взаимно простые числа, а в левой части равенства дробная черта содержится 1988 раз. Вычислите значение выражения m^2+mn-n^2

Ответ: –1.

7. (Студенческая олимпиада, мехмат МГУ). Доказать, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\cfrac{1}{1-\cfrac{1^2}{3-\cfrac{2^2}{5-\cfrac{3^2}{7-\cfrac{\cdot}{\cdot\, -\cfrac{(n-1)^2}{2n-1}}}}}}.$$

Указание. Числители и знаменатели подходящих дробей удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$P_0=0, P_1=b_0, Q_0=1, Q_1=a_1,$$
$$\begin{cases} P_{n+1}=a_{n+1}P_n+b_nP_{n-1}, \\ Q_{n+1}=a_{n+1}Q_n+b_nQ_{n-1} \end{cases}$$

При этом

$$\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{\cdot}{\cdot\, +\cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}}=\frac{P_n}{Q_n}.$$

В рассматриваемом случае,

$$a_n=2n-1, b_n=-n^2, Q_n=n!, P_n=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})\cdot n!.$$

Доказательство можно провести по индукции.

Рекомендуемые источники

1. *У. Болл, Г. Коксетер*, Математические эссе и развлечения, -М.:Мир,1986.
2. *В.И. Арнольд*, Цепные дроби. – М.: МЦНМО, 2009.
3. *С.Б. Гашков, В.Н. Чубариков*, Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. -М.: Наука, 1996.
4. *Ю.В.Нестеренко, Е.М.Никишин*, Очерк о цепных дробях, "Квант", №№ 5 и 6,1983.
5. *Ф.Клейн*, Элементарная математика с точки зрения высшей, т.1, -М.:Наука,1987.
6. *Д.Б.Фукс, М.Б. Фукс*, О наилучших приближениях, "Квант", №6, 7, 1971.
7. *А.Я. Хинчин*, Цепные дроби. -М.:Наука,1978.
8. *Ю.В. Нестеренко*, «Потенциал», №№ 2015.

Приложение. Таблица значений $e(p,q)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
4	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1
5	1	2	3	2	0	1	2	3	2	0	1	2	3	2	0	1	2	3	2	0	1	2	3	2	0
6	1	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	0	1
7	1	2	2	3	3	2	0	1	2	2	3	3	2	0	1	2	2	3	3	2	0	1	2	2	3
8	1	1	3	1	4	2	2	0	1	1	3	1	4	2	2	0	1	1	3	1	4	2	2	0	1
9	1	2	1	2	3	2	3	2	0	1	2	1	2	3	2	3	2	0	1	2	1	2	3	2	3
10	1	1	2	2	1	3	3	2	2	0	1	1	2	2	1	3	3	2	2	0	1	1	2	2	1
11	1	2	3	3	2	3	4	4	3	2	0	1	2	3	3	2	3	4	4	3	2	0	1	2	3
12	1	1	1	1	3	1	4	2	2	2	2	0	1	1	1	1	3	1	4	2	2	2	2	0	1
13	1	2	2	2	4	2	3	5	3	3	3	2	0	1	2	2	2	4	2	3	5	3	3	3	2
14	1	1	3	2	3	2	1	3	4	3	4	2	2	0	1	1	3	2	3	2	1	3	4	3	4
15	1	2	1	3	1	2	2	3	3	2	4	2	3	2	0	1	2	1	3	1	2	2	3	3	2
16	1	1	2	1	2	3	3	1	4	4	3	2	3	2	2	0	1	1	2	1	2	3	3	1	4
17	1	2	3	2	3	3	3	2	3	4	4	4	3	4	3	2	0	1	2	3	2	3	3	3	2
18	1	1	1	2	4	1	4	2	1	3	5	2	5	3	2	2	2	0	1	1	1	2	4	1	4
19	1	2	2	3	3	2	4	4	2	3	5	5	3	4	4	3	3	2	0	1	2	2	3	3	2
20	1	1	3	1	1	2	3	2	3	1	4	3	4	3	2	2	4	2	2	0	1	1	3	1	1
21	1	2	1	2	2	2	1	5	2	2	3	3	6	2	3	3	3	2	3	2	0	1	2	1	2
22	1	1	2	2	3	3	2	3	3	2	1	3	4	4	3	4	4	3	3	2	2	0	1	1	2
23	1	2	3	3	4	3	3	3	4	3	2	3	4	5	4	4	4	5	4	4	3	2	0	1	2
24	1	1	1	1	3	1	3	1	3	3	3	1	4	4	4	2	4	2	4	2	2	2	2	0	1
25	1	2	2	2	1	2	4	2	4	2	4	2	3	5	3	5	3	5	3	2	3	3	3	2	0