Системы счисления

В наше время человек всё время сталкивается с числами. Все мы с детства знакомы с общепринятой записью чисел при помощи арабских цифр. Однако этот способ записи использовался далеко не всегда. В древности практически у каждого народа была своя форма записи чисел, или система счисления.

Система счисления – это способ записи чисел с помощью заданного набора специальных символов и соответствующие ему правила действий над числами.

Алфавит системы счисления – это набор символов используемых для записи чисел в данной системе счисления. Количество символов, использующихся в алфавите, называется его размерностью.

Все системы счисления можно разделить на две большие группы: позиционные и непозиционные.

Непозиционная система счисления – система, в которой значение каждой цифры не зависит от её расположения в числе. Самым простым способом записи (и примером непозиционной системы счисления) натуральных чисел и является их изображение с помощью соответствующего числа палочек. Так, например, число 5 могло быть записано как IIIII. Этим способом пользовались люди в глубокой древности, однако это было очень неудобно для записи больших чисел.

Другой пример непозиционной системы счисления – римская система счисления, в которой в качестве цифр используются латинские буквы (I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000). В римской системе счисления используется следующее правило формирования чисел: если цифра с меньшим значением стоит слева от цифры с большим значением, то её надо отнимать от большей, если справа – то прибавлять.

Пример 1. Рассмотрим, как записываются числа 128 и 409 в римской системе счисления:

137 = CXXXVII = 100 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1;

409 = CDIX = 500 – 100 + 10 – 1.

Выполнять арифметические действия в непозиционных системах счисления неудобно и сложно, они не подходят для записи дробных и отрицательных чисел, а их алфавит бесконечен, ведь для больших чисел приходится вводить новые цифры, и всегда найдётся такое число, которое будет неудобно записывать теми цифрами, которые уже есть в алфавите.

Позиционная система счисления – система, в которых значение каждой цифры зависит от её расположения в числе. Например, привычная для нас, десятичная система счисления является позиционной. Это нетрудно показать на примере: в числе 5555 – первая цифра означает 5 тысяч, вторая – 5 сотен, третья – 5 десятков и последняя 5 единиц.

Базисом позиционной системы счисления называется последовательность чисел, каждое из которых задаёт вес соответствующего разряда. Например, базисом десятичной системы счисления является последовательность степеней числа 10 – {1, 10, 100, 1000, 10000, …}.

Число в позиционной системе счисления формируется *аддитивно-мультипликативным способом*. Это означает, что значение каждой цифры необходимо умножить на соответствующий элемент базиса, а затем сложить полученные значения. Например, число 1234 формируется как 1*1000+2*100+3*10+4.

Если базис позиционной системы счисления образует геометрическую прогрессию, знаменатель которой натуральное число, большее 1, а цифры – целые неотрицательные числа, то такая система счисления называется *традиционной*.

Основанием традиционной позиционной системы счисления называется знаменатель геометрической прогрессии, образующей её базис. Традиционные системы счисления с основанием P принято называть P-ичными. Основание системы счисления, в которой записано число, приписывается после числа в виде нижнего индекса.

Для записи чисел в позиционной системе счисления с основанием P нужно P цифр. Если $P \leq 10$, то в качестве алфавита используют первые P арабских цифр, для $P > 10$ к цифрам добавляются 26 латинских букв. Для случаев, когда основание системы счисления больше 36 (то есть все цифры от 0 до 9 и буквы от A до Z использованы), принято включать в алфавит десятичные числа, заключённые в квадратные скобки, например, [10], [75], [129]. Однако соблюдение этого правила не является обязательным, и для систем счисления с основанием больше 36 возможны и другие способы выбора алфавита.

Рассмотрим примеры алфавитов различных систем счисления:

Основание	Название	Обозначение	Алфавит
$P = 2$	Двоичная	x_2	{0 , 1}
$P = 3$	Троичная	x_3	{0, 1, 2}
$P = 8$	Восьмеричная	x_8	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
$P = 10$	Десятичная	x_{10}	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
$P = 16$	Шестнадцатеричная	x_{16}	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Теперь попробуем понять, как именно формируются числа в различных традиционных позиционных системах счисления на примере натуральных чисел. В десятичной системе счисления натуральные числа – это числа вида 1, 2, 3, 4, 5, … , то есть натуральные числа задаются путём их перечисления. Метод перечисления для описания множества натуральных чисел может быть применён не только для десятичной, но и для любой *P*-ичной системы счисления:

1. Если последняя цифра числа в *P*-ичной системе меньше, чем *P*-1, то в следующем за ним натуральном числе будут совпадать все цифры, кроме последней, а последняя цифра будет заменена на следующий символ в алфавите.
2. Если последняя цифра числа равна *P*-1, то последняя цифра следующего за ним числа станет равна 0, а единица будет перенесена в следующий разряд. При этом, если предпоследняя цифра снова равна *P*-1, то произойдёт еще один перенос и т.д., до тех пор, пока очередная цифра не станет меньше *P*-1 или все разряды закончатся и 1 перейдёт в новый разряд.

Пример 2. Приведём первые 8 натуральных чисел, записанных в троичной системе счисления.

1_{10}	1_3
2_{10}	2_3
3_{10}	10_3
4_{10}	11_3
5_{10}	12_3
6_{10}	20_3
7_{10}	21_3
8_{10}	22_3

Задача 1. Сколько десятичных чисел меньших 13, но больших 4 в четверичной системе счисления содержат в своей записи 3?

Для решения задачи выпишем ряд натуральных чисел от 5 до 12 включительно в четверичной системе счисления:

11, 12, **13**, 20, 21, 22, **23**, **30**.

Всего 3 числа, у которых в записи есть 3 (выделены жирным шрифтом).

Ответ: 3.

Для того чтобы применять алгоритмы перевода из *P*-ичной системы счисления в десятичную введём понятие развёрнутой формы числа.

Развёрнутой формой записи числа A называется запись вида:

$$A_q = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots a_1 q_1 + a_0 q_0 + a_{-1} q_{-1} + a_{-2} q_{-2} + \dots + a_{-m} q_{-m},$$

где A_q число в системе счисления с основанием q, $A_q = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$, a_i – цифры данной системы счисления, присутствующие в записи числа A_q, количество разрядов в целой части числа равно n + 1, в дробной – m. Запись числа в виде $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$ называется *свёрнутой формой*.

Пример 3. Развёрнутые записи чисел $100{,}11_2$, $5643{,}78_{10}$, $761{,}3_8$, AF_{16}:

$100{,}11_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2}$

$5643{,}78_{10} = 5 * 10^3 + 6 * 10^2 + 4 * 10^1 + 3 * 10^0 + 7 * 10^{-1} + 8 * 10^{-2}$

$761{,}3_8 = 7 * 8^2 + 6 * 8^1 + 1 * 8^0 + 3 * 8^{-1}$

$AF_{16} = A * 16^1 + F * 16^0$

Алгоритм перевода чисел из *P*-ичной системы счисления в десятичную: для того чтобы перевести число из *P*-ичной системы счисления в десятичную, нужно представить все слагаемые в развернутой записи недесятичного числа в десятичной системе и вычислить полученное выражение по правилам арифметики. Полученный результат – число в десятичной системе.

Пример 4. Получим десятичное представление для чисел, записанных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления, из примера 1.

$100{,}11_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} = 4 + 0{,}5 + 0{,}25 + = 4{,}75$

$761{,}31_8 = 7 * 8^2 + 6 * 8^1 + 1 * 8^0 + 3 * 8^{-1} = 448 + 48 + 1 + 0{,}\ 375 = 497{,}375$

$AF_{16} = A * 16^1 + F * 16^0 = 10 * 16 + 15 = 175$

Задача 2. В некоторой системе счисления число 521_{10} выглядит как 293. Найдите основание этой системы счисления.

Для решения задачи необходимо составить и решить уравнение, используя развёрнутую форму записи чисел:

$293_x = 2 * x^2 + 9 * x^1 + 3 * x^0 = 521$

$2x^2 + 9x + 3 = 521$

$2x^2 + 9x – 518 = 0$

$D = 81 + 4144 = 4225 = 65^2$

$x_1 = 14$

$x_2 = –18{,}5$ – не подходит (основание системы не может быть меньше нуля).

Ответ: 14.

Для всех традиционных систем счисления существуют одни и те же правила выполнения арифметических действий с помощью таблиц сложения и умножения. Это означает, что правила сложения, вычитания, умножения, деления столбиком, а также законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности одинаковы для всех традиционных систем счисления. Приведём правила выполнения арифметических действий:

1. Для того чтобы найти сумму двух чисел в произвольной системе счисления, необходимо просуммировать составляющие их цифры по разрядам. Если сумма двух цифр оказалась меньше P, то следующий разряд не изменяется, иначе старший разряд числа увеличивается на 1.
2. Для того чтобы получить разность двух чисел в произвольной системе счисления, необходимо вычислить разность из цифр по разрядам. Если цифра в разряде уменьшаемого больше или равна цифре в соответствующем разряде вычитаемого, то следующий разряд не изменяется, иначе нужно занять единицу в следующем разряде уменьшаемого. При этом, когда происходит заём из старшего разряда, в младший переходит P, то есть основание системы счисления.
3. Для того чтобы вычислить произведение двух чисел в произвольной системе счисления необходимо перемножить составляющие их цифры по разрядам. Если произведение двух цифр меньше P, то следующий разряд не изменяется, иначе следующий разряд нужно увеличить на целую часть от деления полученного произведения на P.
4. Деление чисел в произвольной системе счисления выполняется, как и в десятичной системе, с учётом алфавита системы счисления.
5. При выполнении арифметических действий в системах счисления с основанием меньшим 10, следует учитывать алфавит системы счисления, чтобы не появились те цифры, которых в этой системе счисления нет.
6. Выполнение умножения и деления в различных системах счисления может оказаться довольно трудоёмким, поэтому зачастую проще перевести оба числа в десятичную систему счисления, выполнить умножение или деление, а затем перевести результат в исходную систему счисления. Для сложения и вычитания такой способ тоже возможен, однако выгоднее выполнять действия сразу.

Ниже приведены таблицы сложения и умножения для двоичной и троичной систем счисления.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

*	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Пример 5. Рассмотрим примеры выполнения арифметических операций в различных системах счисления:

$$\begin{array}{r} 5674{,}36_9 \\ \underline{+135{,}25_9} \\ 5820{,}62 \end{array} \qquad \begin{array}{r} EA15{,}42_{15} \\ \underline{-B05{,}36_{15}} \\ DE10{,}0B \end{array}$$

$$1462_7 * 54_7 = 583_{10} * 39_{10} = 22737_{10} = 123201_7$$

$$3CB6_{17} : 1GE_{17} = 18400_{10} : 575_{10} = 32_{10} = 1F_{17}$$

При переводе числа из одной системы счисления в другую свойства числа не изменяются. Поэтому можно переводить числа из любой системы счисления в любую другую систему счисления. Однако, так как перевод чисел из одной системы счисления в другую сопровождается большим количеством операций умножения и деления, что является трудоёмким процессом, то проще сначала переводить число в десятичную систему счисления, а потом уже в ту систему счисления, которая необходима. Это означает, что если нужно перевести число из пятеричной системы счисления в девятеричную, то нужно сначала перевести число из пятеричной системы в десятичную, а потом из десятичной в девятеричную. Прямой перевод целесообразен только для тех случаев, когда необходимо число из P-ичной системы перевести в Q-ичную, и $Q = P^m$, но для этого используется другой алгоритм, который будет рассмотрен дальше.

Рассмотрим алгоритм перевода десятичных чисел в другие системы счисления.

Алгоритм перевода целых десятичных чисел в другие системы счисления:

1. Последовательно выполняем деление данного числа на P нацело в десятичной системе и записываем в качестве нового значения десятичного числа целую часть результат от деления.
2. Остаток от деления заменяем на соответствующую цифру в P-ичной системе счисления.
3. Действия 1-2 продолжаем до тех пор, пока не получится частное, меньшее делителя.
4. Составим из остатков от деления и последнего частного число в новой системе счисления, записывая их в обратном порядке.

Пример 6. Рассмотрим перевод числа 176 из десятичной системы в троичную, пятеричную и четырнадцатеричную системы:

176 : 3 = 58 (2)	176 : 5 = 35 (1)	176 : 14 = 12 = C (8) – останавливаемся
58 : 3 = 19 (1)	35 : 5 = 7 (0)	
19 : 3 = 6 (1)	7 : 5 = 1 (2) – останавливаемся	
6 : 3 = 2 (0) – останавливаемся		

Таким образом, получаем, что $176_{10} = 20112_3 = 1201_5 = C8_{14}$

Алгоритм перевода дробных десятичных чисел в другие системы счисления:

1. Умножим данное дробное число на основание системы счисления *P*, целая часть полученного произведения будет первой цифрой после запятой в искомом числе. Получившаяся дробная часть может оказаться равна 0, но она всегда меньше, чем *P*, поэтому мы всегда получаемым цифры в нужной нам системе счисления.
2. Дробную часть произведения снова умножаем на основание системы счисления *P*, и приписываем целую часть произведения к результату.
3. Выполняем пункт 2 до тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю, или не будет достигнута необходимая точность, или не выделится период (дробная часть окажется равной уже получавшейся ранее дробной части произведения).

Пример 7. Рассмотрим перевод числа 0,125 из десятичной системы в двоичную и шестнадцатеричную:

0,125 * 2 = 0,25	0,125 * 16 = 2,0
0,25 * 2 = 0,5	0,0 * 16 = 0,0 - останавливаемся
0,5 * 2 = 1,0	
0,0 * 2 = 0,0 – останавливаемся	

Таким образом, получаем, что $0{,}125_{10} = 0{,}001_2 = 0{,}2_{16}$

Остаётся рассмотреть алгоритм быстрого перевода из системы счисления с основанием Q в систему счисления с основанием *P* для случаев, когда $Q = P^m$. Для этого достаточно запись числа в *P*-ичной системе разбить на группы по m цифр, начиная с самого младшего разряда, а затем каждую такую группу заменить одной цифрой в *Q*-ичной системе счисления. Если в последней группе (в старших разрядах) получилось меньше *m* цифр, тот слева нужно приписать незначащие нули.

Для того чтобы перевести целое число из системы счисления с основанием *Q* в систему счисления с основанием *P*, где $Q = P^m$, необходимо каждую цифру из *Q*-ичной системы перевести в *P*-ичную, дополнить, если требуется, полученные числа слева нулями, чтобы каждое число, кроме самого левого, состояло ровно из *m* цифр.

При переводе чисел из *Q*-ичной системы счисления в P-ичную и, наоборот, при условии $Q = P^m$, используется аналогичный подход, только незначащие нули приписываются справа, а не слева.

Для использования данных методов бывает удобно отдельно выписать кодировочную таблицу, где каждой *Q*-ичной цифре ставится в соответствие *m* *P*-ичных.

Пример 8. Рассмотрим быстрый перевод числа 1000011001 из двоичной системы в восьмеричную:

Так как $8 = 2^3$, то каждым трём цифрам в двоичной системе соответствует одна цифра в восьмеричной. Таблица соответствия:

0_8	000_2
1_8	001_2
2_8	010_2
3_8	011_2
4_8	100_2
5_8	101_2
6_8	110_2
7_8	111_2

Значит, получим: $1\ 000\ 011\ 001_2$

$001\ 000\ 011\ 001_2$

$1\quad 0\quad 3\quad 1\ _8$

То есть $1000011001_2 = 1031_8$.

Пример 9. Рассмотрим быстрый перевод числа FA9D из шестнадцатеричной системы в двоичную:

Так как $16 = 2^4$, то каждой шестнадцатеричной цифре соответствуют четыре цифры в двоичной записи. Получаем: $F\quad A\quad 9\quad D_{16}$

$15\quad 10\quad 9\quad 14$

$1111\ 1010\ 1001\ 1110_2$

То есть $FA9D_{16} = 1111101010011110_2$.

Задача 3. Сколько единиц в двоичной записи значения выражения: $4^{511} + 2^{511} – 511$?

Преобразуем выражение: $4^{511} + 2^{511} – 511 = 2^{1022} + 2^{511} – 2^9 + 2^0$. Если бы не было вычитания, то ответ был бы 3, поскольку двоичная запись числа 2^n содержит одну единицу и n нулей. Вычитание 2^9 потребует занять в старшем разряде единицу. Ближайший разряд, в котором можно занять единицы – 512-ый. Тогда с 10-ого по 511-ый разряд получим единицы, так как двоичная запись числа $2^m – 2^k$ содержит $k– m$ единиц и m нулей. Поэтому у исходного числа 1 + (511 – 9) + 1 = 504 единицы.

Ответ: 504.

Задача 4. Все 4-буквенные слова, составленные из букв В, Е, К, О, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

1. ВВВВ

2. ВВВЕ
3. ВВВК
4. ВВВО
5. ВВЕВ
6. …

Запишите слово, стоящее на восьмидесятом месте.

Будем использовать системы счисления для решения задачи, а именно четверичную. Заменим буквы В, Е, К, О на 0, 1, 2, 3. Выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:

1. 0000
2. 0001
3. 0002
4. 0003
5. 0010
6. …

Полученная запись – числа, записанные в четверичной системе счисления, записанные в порядке возрастания. Значит на восьмидесятом месте стоит число 79 (так как первое число 0). Переведём число 79 в четверичную систему счисления:

$79_{10} = 1 * 4^3 + 0 * 4^2 + 3 * 4^1 + 3 * 4^0 = 1033_4$

Произведём обратную замену цифр на буквы, получим: ЕВОО.

Ответ: ЕВОО.