ЗАДАНИЕ МП 2 «Геометрия квадратного трехчлена»

1. Найдите множество всех таких точек (p,q) фазовой плоскости π, для которых уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных корня x_1 и x_2, причем $a < x_1 < b$, $c < x_2 < d$ (a,b,c,d заданы, см. свой вариант).

Каждый ученик выполняет свой вариант, который совпадает с номером в классном журнале.

2. Четыре корневые прямые (значения для a,b,c,d см. в таблице) делят внешность дискриминантной параболы на 15 частей. Раскрасьте эти 15 частей фазовой плоскости разными цветами, и в соответствие им — плоскость XOY, чтобы глядя на неё можно было ответить на вопрос о расположении корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ по отношению к интервалам (a,b) и (c,d) .

Чертежи выполнять на мм бумаге формата А4. Можно закупиться в магазинах канц. товаров сразу на весь класс. Если кто умеет – можно пользоваться Математическим конструктором. Рекомендуется для части б) задания написать формулировку необходимого и достаточного условия для любого из 15 случаев. При отчёте Вас могут попросить доказать любой теоретический момент. Правильно сделанный чертеж и раскраска, при неумении ученика объяснить сделанное, не будут оцениваться положительно.

Задания оформить аккуратно, выписав свое условие без букв a,b,c,d

Отчет по МП2 через две недели — 14 октября, если кто пожелает – можно раньше.

Через неделю 7 октября в классе решение задач с параметром и консультации с преподавателями на тему МП2.

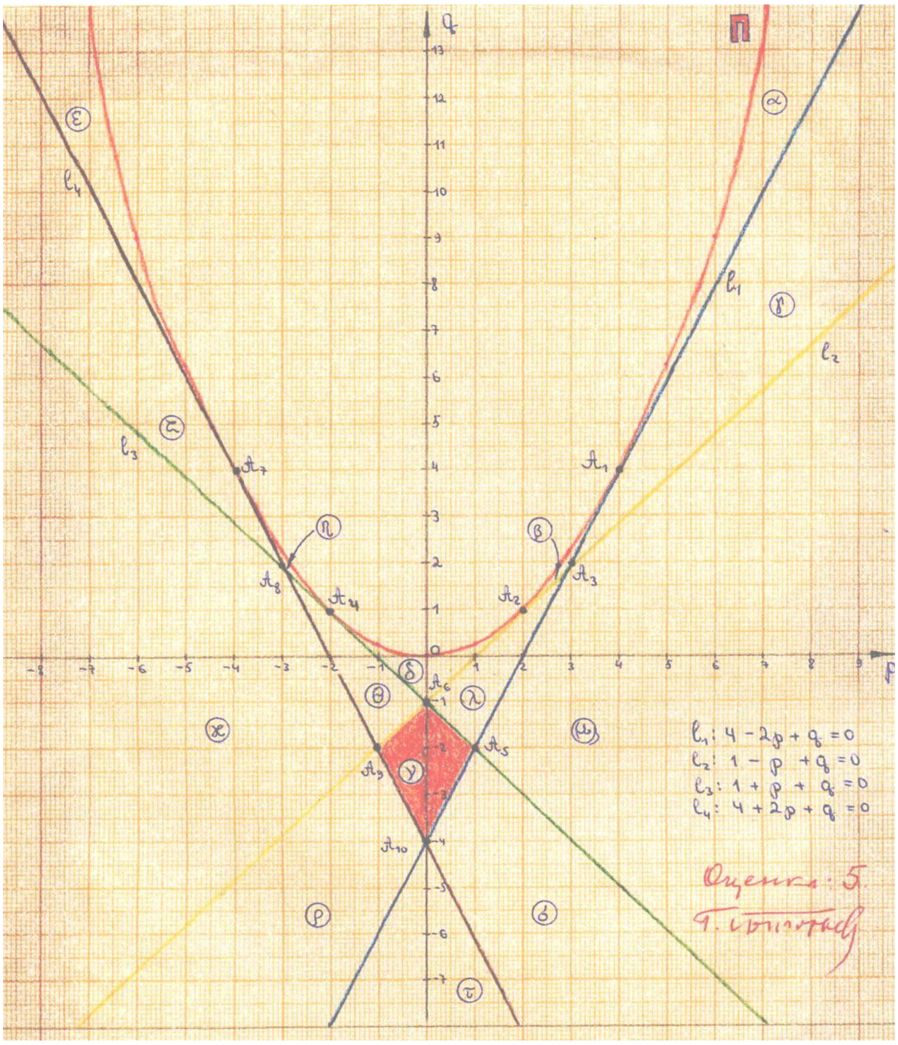
Варианты

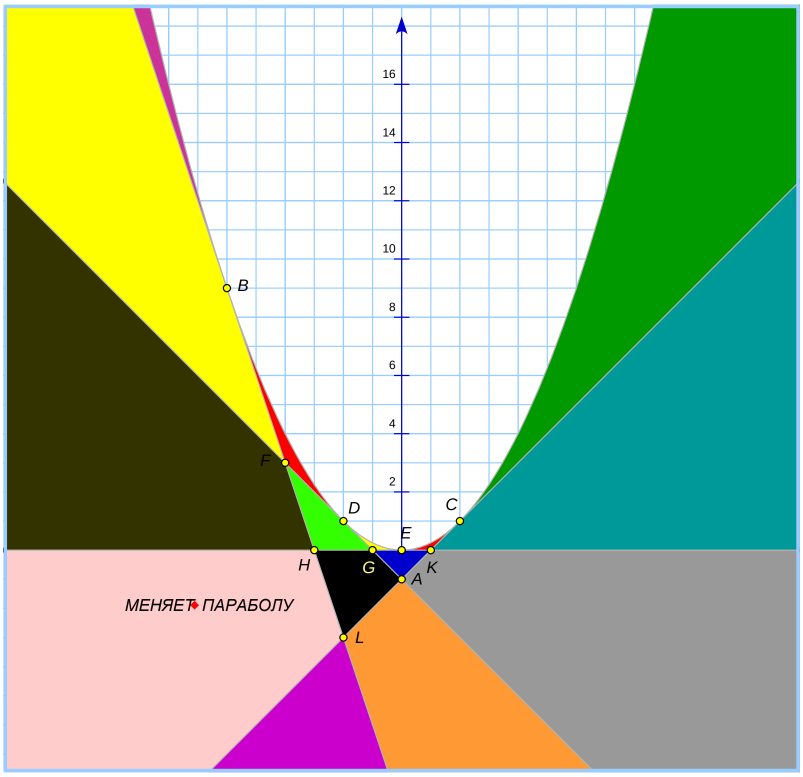
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	-1	-2	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-3	-3
b	0	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2
c	1	0	2	1	1	0	0	0	1	2	2
d	2	1	3	3	2	1	2	3	3	3	3

№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
a	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-1	-2	-2	-3	-3	-1	-2	-2	-2	-4	-4	-4	-4	-4
b	-1	0	-2	-2	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	2	-2	-3	-1	0	2
c	1	1	0	1	0	0	0	2	2	1	2	2	3	2	0	1	0	1	2	1	3
d	3	2	1	2	1	2	3	3	3	3	3	3	4	4	1	3	2	3	3	3	4

Пример чертежа для выполнения задания

Задание а)





Задание б)

Здесь приведена таблица, Вас просят вместо таблицы разрисовать плоскость XOY в соответствие с этой таблицей

Область	α	β	γ	δ	ε	η	θ	λ
Корни	$x_1<-2$ $x_2<-2$	$-2<x1<-1$ $-2<x2<-1$	$x_1<-2$ $-2<x_2<-1$	$-1<x_1<1$ $-1<x<1$	$x_1>2$ $x_2>2$	$1<x1<2$ $1<x2<2$	$-1<x_1<1$ $1<x_2<2$	$-2<x_1<-1$ $-1<x_2<1$

Область	μ	ν	ξ	ρ	σ	τ	χ
Корни	$x_1<-2$ $-1<x_2<1$	$-2< x_1<-1$, $1< x_2<2$	$1<x_1<2$ $x_2>2$	$-2<x_1<-1$ $x_2>2$	$x_1<-2$ $1<x_2<2$	$x_1<-2$ $x_2>2$	$-1<x_1<1$ $x_2>2$

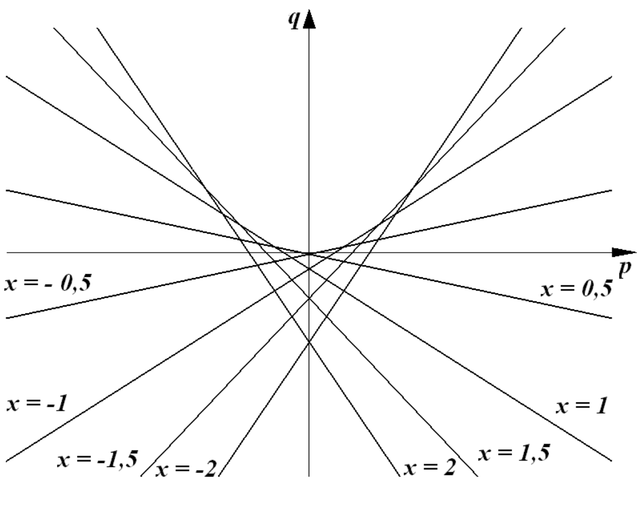
Ниже текст с теорией и исследовательскими проектами для желающих по теме «Геометрия кв. трехчлена». Проекты могут быть взяты, как темы творческих работ.

Геометрия квадратных уравнений

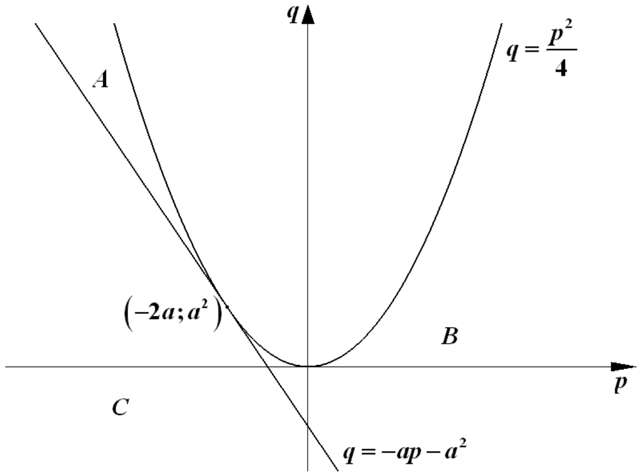
Лекция В.В. Вавилова (сентябрь, 2013)

Рассмотрим семейство квадратных трехчленов $y(x) = x^2 + px + q$. Поставим в соответствие каждому такому трехчлену точку с координатами p и q на так называемой фазовой плоскости Opq этого семейства. Соответствие между точками плоскости и множеством квадратных трехчленов – взаимно однозначное, т.е. каждому трехчлену отвечает ровно одна точка плоскости и наоборот.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$, при фиксированном x, задает прямую на плоскости Opq, называемую корневой: на этой прямой, и только на ней, расположены точки, которым отвечают уравнения, имеющие своим корнем фиксированное число x. Каждому значению *x* соответствует своя корневая прямая. Придавая *x* более или менее частые значения и строя для них соответствующие корневые прямые, заметим, что на плоскости «вырисовывается» некоторая область, которую корневые прямые не пересекают (рис.1). Кривая, которая ограничивает эту область является параболой $q = \frac{1}{4}p^2$ и называется дискриминантной параболой. Точки этой параболы, и только такие точки, соответствуют трехчленам, имеющим совпадающие корни. Все корневые прямые являются касательными к данной параболе (Почему?). Дискриминантная парабола разбивает плоскость на две области. Внутренность параболы задается неравенством $q > \frac{1}{4}p^2$ – через точки этой области не проходит ни одна



корневая прямая. Таким образом, точки этой области соответствуют квадратным уравнениям, не имеющим действительных корней. Ни через одну её точку нельзя провести касательную к дискриминантной параболе.



Через любую точку внешней к параболе области $q<\frac{1}{4}p^2$ можно провести две касательные к параболе. Точки этой области соответствуют квадратным трехчленам, имеющим два действительных различных корня.

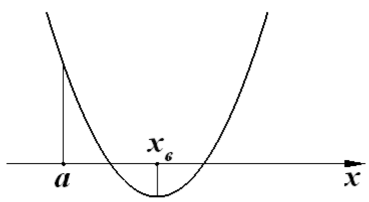
Взаимно однозначное соответствие между точками фазовой плоскости и квадратными трехчленами позволяет наглядно описать все уравнения с заданными свойствами корней и решать задачи на распределение корней квадратного трехчлена, не проводя длинных алгебраических выкладок.

Проведем корневую прямую $a^2+ap+q=0$ при некотором выборе числа a. Достаточно просто проверить, что она касается дискриминантной параболы в точке (-2a;a^2). Точки фазовой плоскости, принадлежащие данной прямой, задают множество квадратных трехчленов, каждый из которых имеет число a своим корнем. Эта корневая прямая разбивает внешность дискриминантной параболы на три области (рис.2); границы областей мы к ним не присоединяем.

Область А (левая) задается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} a^2+ap+q>0, \\ q<\dfrac{p^2}{4}, \\ -\dfrac{p}{2}>a. \end{cases}$$

Переведем полученные неравенства «на язык квадратного трехчлена y(x) в системе координат Оxy»: квадратный трехчлен y(x)= x^2+px+q с коэффициентами ($p;$ q) из области А принимает положительное значение в точке x = a, имеет положительный дискриминант, а абсцисса вершины параболы больше a (рис.3). Так как значение в точке a положительно, а в вершине параболы отрицательно (Почему?), то по теореме о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции и строгой монотонности функции на данном отрезке квадратный трехчлен x^2+px+q имеет ровно 1 корень на интервале $(a, x_в)$. Второй корень принадлежит промежутку $(x_в, +\infty)$. Таким образом, область А соответствует множеству квадратных трехчленов с положительным дискриминантом, оба корня которых больше a.



Обратное также верно (Почему?) и поэтому квадратный трехчлен $y(x)=x^2+px+q$ имеет два корня, большие *a*, тогда и только тогда, когда коэффициенты (*p; q*) принадлежат области А, то есть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} y(a)>0, \\ D=p^2-4q>0, \\ x_в>a. \end{cases}$$

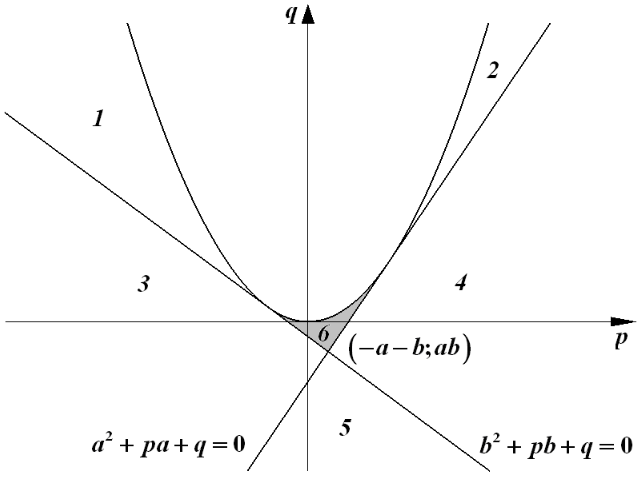
Аналогично, квадратный трехчлен $y(x)=x^2+px+q$ имеет два корня, меньшие *a*, тогда и только тогда, когда коэффициенты (*p; q*) принадлежат области В (правая), то есть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} y(a)>0, \\ D=p^2-4q>0, \\ x_в<a. \end{cases}$$

Область С (нижняя) задается неравенством $a^2+ap+q<0$ и соответствует квадратным трехчленам, имеющим два корня, один из которых больше *a*, другой – меньше а. Докажите это самостоятельно.

Задача 1. Как расположены корни уравнения $x^2+px+q=0$ по отношению к интервалу (*a; b*) в зависимости от положения точки (p,q) на фазовой плоскости Opq?

Решение. Проведем две корневые прямые $a^2+pa+q=0$ и $b^2+pb+q=0$, отвечающие корням *a* и *b*. Они делят внешность дискриминантной параболы $q=\frac{1}{4}p^2$ на шесть областей (рис.4).



Число корней квадратного трехчлена x^2+px+q, принадлежащих интервалу (*a; b*), $a<b$, зависит от того, в какой из областей находится точка (*p; q*), соответствующая квадратному трехчлену x^2+px+q.

Область 3 задается системой неравенств (Почему?)

$$\begin{cases} a^2+ap+q>0, \\ b^2+bp+q<0. \end{cases}$$

и соответствует квадратным трехчленам, значения которых в точке *a* – положительно, а в точке *b* – отрицательно. Таким образом, квадратный трехчлен x^2+px+q имеет два корня, один из которых принадлежит интервалу (*a; b*), а другой – промежутку $(b;+\infty)$. С другой стороны, легко установить и обратное утверждение. Поэтому область 3 описывает все квадратные уравнения с нужным свойством корней.

Аналогично, можно доказать, что область 4 соответствует квадратным трехчленам, имеющим один корень на интервале (a; b), но, в отличие от области 3, второй корень принадлежит промежутку $(-\infty; a)$.

Области 1, 2, 5 соответствуют квадратным трехчленам, не имеющим корней в интервале (a; b). Причем, область 1 соответствует квадратным трехчленам, имеющим два корня в промежутке $(b;+\infty)$, область 2 — квадратным трехчленам, имеющим два корня в промежутке $(-\infty; a)$, область 5 - квадратным трехчленам, имеющим один корень в промежутке $(-\infty; a)$ и один корень в промежутке $(b;+\infty)$.

Квадратный трехчлен $y(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных корня, принадлежащих заданному интервалу (a; b) тогда и только тогда, когда точка (p; q) принадлежат области 6 (Докажите это!), то есть выполнены следующие условия:

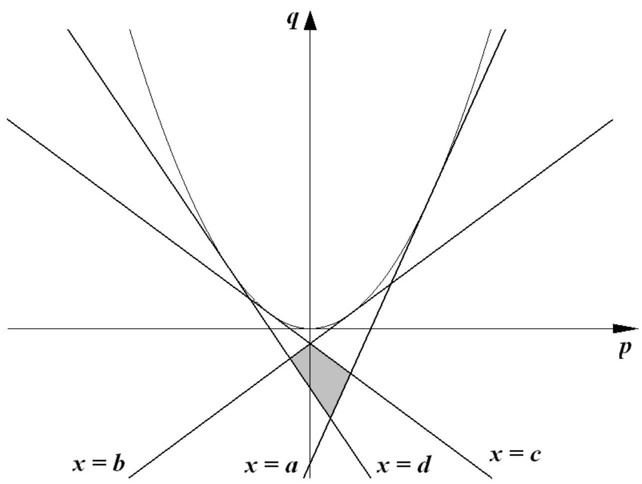
$$\begin{cases} y(a) > 0, \\ y(b) > 0, \\ D = p^2 - 4q > 0, \\ a < x_в < b. \end{cases}$$

Задача 2. Найти множество точек (p; q) в плоскости Opq, для которых квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных корня, один из которых принадлежит интервалу *(a; b)*, другой — интервалу *(c; d)*?

Решение.

Рассмотрим два случая взаимного расположения интервалов *(a; b)* и *(c; d)*.

1 случай. Интервалы *(a; b)* и *(c; d)* не пересекаются. Пусть $a<b\leq c<d$.

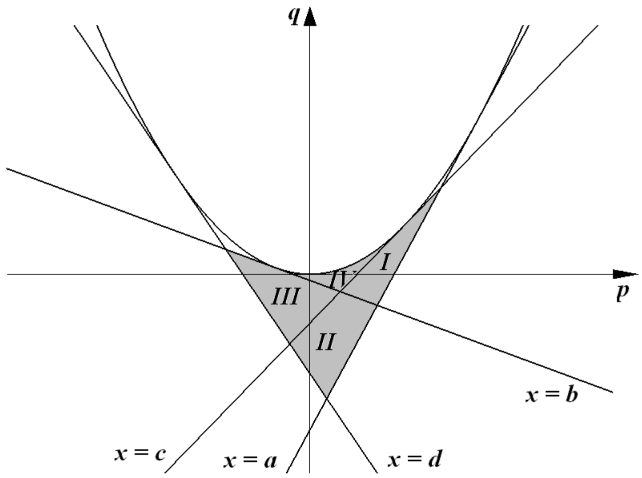


Квадратным трехчленам, имеющим один корень на интервале *(a; b)*, соответствуют области 3 и 4 (на рис.4 к задаче 1), образованные при пересечении корневых прямых $a^2 + pa + q = 0$ и $b^2 + pb + q = 0$. В пересечении соответствующих областей для интервалов *(a; b)* и *(c; d)* получим искомое множество. Таким образом, в случае $b \neq c$, квадратным трехчленам $x^2 + px + q$, имеющим два действительных корня, один из которых принадлежит интервалу *(a; b)*, другой — интервалу *(c; d)*, соответствуют внутренние точки четырехугольника, образованного при пересечении соответствующих корневых прямых (рис.5).

В случае $b=c$, корневые прямые для $x=b$ и $x=c$ совпадают и в пересечении соответствующих областей получается треугольник.

2 случай. Интервалы *(a; b)* и *(c; d)* пересекаются, причем $a<c<b<d$. Проведем четыре корневые прямые, соответствующие значениям *a, b, c, d* (рис.6).

Область I соответствует квадратным трехчленам, имеющим два корня, один из которых принадлежит интервалу (*a; c*), другой – интервалу (*c; b*).



Область II соответствует квадратным трехчленам, имеющим два корня, один из которых принадлежит интервалу (*a; c*), другой — интервалу (*b; d*).

Область III соответствует квадратным трехчленам, имеющим два корня, один из которых принадлежит интервалу (*c; b*), другой — интервалу (*b; d*).

Область IV соответствует квадратным трехчленам, имеющим два корня в интервале (*c; b*).

Все области строятся аналогично пункту 1 решения задачи. Объединение полученных областей (рис.6) – множество точек плоскости, соответствующих квадратным трехчленам, имеющим два действительных корня, один из которых принадлежит интервалу *(a; b)*, другой - интервалу *(c; d)*, причем $a<c<b<d$.

Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи взаимного расположения интервалов *(a; b)* и *(c; d)*.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ПРОЕКТЫ (для желающих)

I. Уравнения третьей и четвертой степени

Провести исследования для семейств уравнений вида

$$x^3 + px + q = 0,\ x^4 \pm x^2 + px + q = 0,$$

и дать на фазовой плоскости Opq геометрические характеристики множеств, точкам которых отвечают уравнения с тем или иным расположением действительных корней уравнений. Интересен и вопрос о расположении комплексных корней.

II. Тригонометрические полиномы

Рассмотрим функции

$$f(x) = \cos^2 x + p\cos x + q,$$

где x изменяется на отрезке $[0;\pi]$.

Каждой такой функции, как и раньше, поставим в соответствие точку на плоскости Opq.

а) Исследовать функцию f(x) на возрастание и убывание в зависимости от положения точки (p,q) на плоскости Opq.

b) Построить на одном и том же графике кривые, соответствующие следующим случаям:

(4;6), (2;6), (-1;6), (-2;6), (-4;6).

c) Пусть M_0 и M – точки плоскости Opq и соответствующие им функции

$$f_0(x) = \cos^2 x + p_0 \cos x + q_0,\ f(x) = \cos^2 x + p \cos x + q.$$

Найти наибольшее значение выражения $|f(x) - f_0(x)|$ на отрезке $[0;\pi]$. Обозначим его через $D(M_0,M)$; рассмотреть несколько случаев в зависимости от знаков $p - p_0$ и $q - q_0$.

d) Предположим, что M_0 – фиксированная точка, а M – переменная. Определить геометрическое место точек M при условии, что $D(M_0,M)$ = Const. Пусть A – точка с координатами p = q = 2, а B – точка с координатами p=q= -2. Найти геометрическое множество точек M таких, что

$$D(M,A) = D(M,B).$$

Рекомендуемая Литература

1. А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, Г.В. Пухова, О.С. Смирнова, С.В. Смирнов, Летняя школа на Рубском озере. -М.: Просвещение, 1971.
2. В.В. Вавилов, Сетчатые номограммы. - Журнал «Квант», (6)1978.
3. В.В. Вавилов , Математический практикум в школе имени А.Н. Колмогорова. – М.: Школа имени А.Н. Колмогорова, рукопись, 2004. -96с.