Заочная школа СУНЦ им. А. Н. Колмогорова
МГУ им. М. В. Ломоносова

Основы электростатики

Задание №1 для 9 класса

Москва, 2016

Глава 1

Основы электростатики

1.1 Введение

Ежедневно каждый человек в современном мире сталкивается с электромагнитными явлениями: используя телевизоры, компьютеры и смартфоны и т. д. Почти все приборы используют электронику, в основе которой лежат электромагнитные явления. Самым ярким и красивым примером в природе является молния.

Электромагнитные явления присутствуют везде вокруг нас, как минимум из-за этого их стоит изучить. Мы ограничимся электростатикой, рассмотрим основные законы и их применение.

Первое задание посвящено определению электрического заряда, закону Кулона и принципу суперпозиции.

1.2 Электрический заряд

Все разнообразие электрических явлений в природе можно объяснить существованием двух видов зарядов (**под зарядами договоримся понимать физическую величину, отвечающую за электрические взаимодействия**. Также слово «заряд» употребляется в смысле частицы, обладающей электрическим зарядом). Например, если взять стеклянную палочку и потереть ей о шелковую ткань, то на палочке и ткани перераспределятся заряды (также говорят, что тела электризуются трением). Не имеет никакого значения то, как мы назовем эти заряды. Все мировое сообщество приняло следующее обозначение: на стекле появляется положительный заряд, а на ткани - отрицательный. Существуют другие примеры, например, с эбонитовой палочкой и шерстяной тканью, но здесь мы ограничимся одним вариантом.

Думаю, что каждый может попробовать выполнить дома следующие опыты: взять две стеклянные палочки и потереть их о шелковую ткань (См.

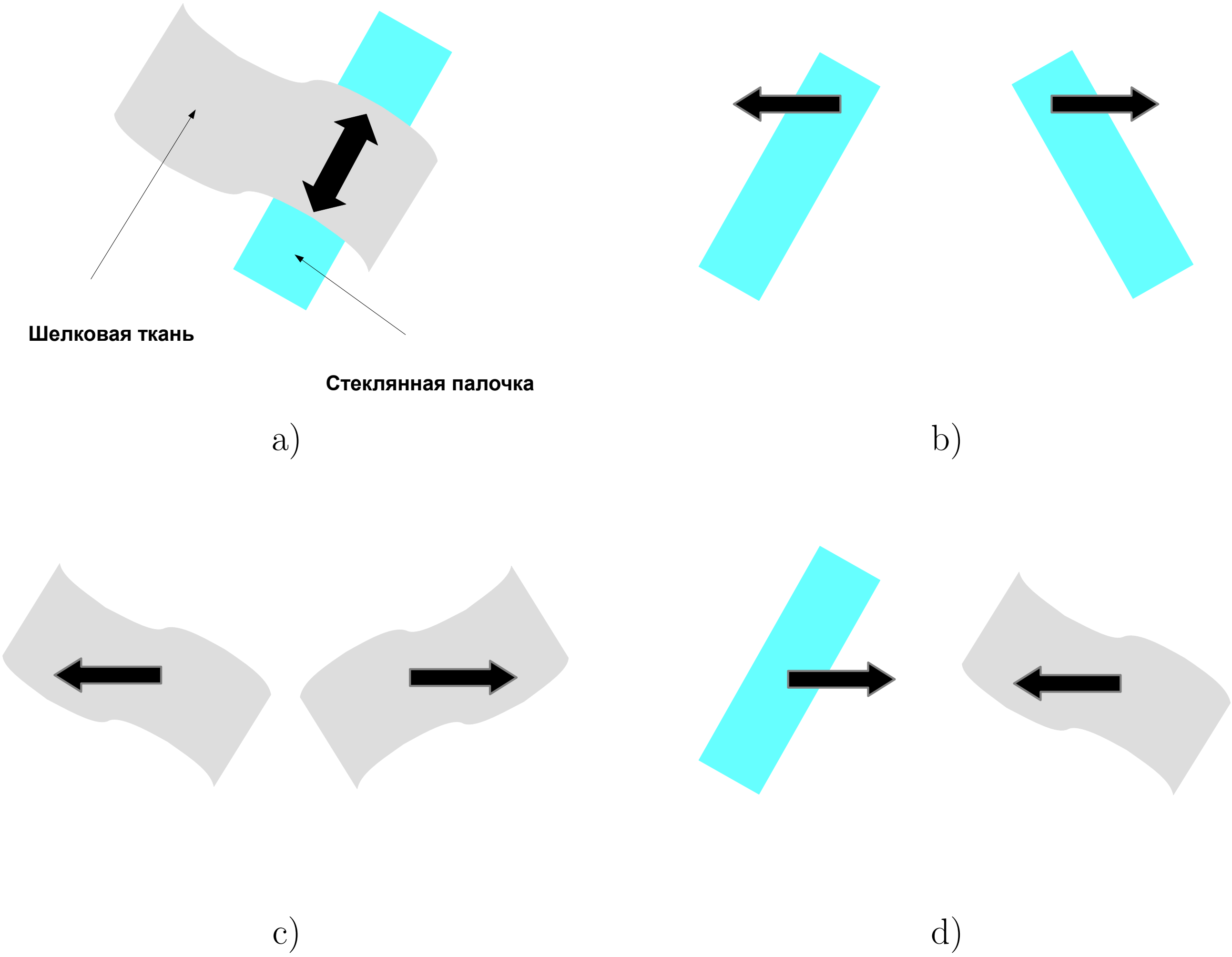

Рис. 1.1: Эксперимент со стеклянной палочкой и шелковой тканью: а) Необходимо потереть палочку о ткань, б) Стеклянные палочки отталкиваются, в) Шелковые ткани отталкиваются, г) Ткань и палочка притягиваются.

Рис. 1.1). Далее, попробуйте поднести эти две палочки друг к другу. Вы заметите, что палочки сопротивляются этому (отталкиваются друг от друга). Аналогичный результат будет и при поднесении двух шелковых тканей друг к другу, предварительно потертых о стекло. Если же мы потрем палочку о шелк, а затем попробуем поднести их друг к другу (палочку и шелк), то можно заметить, что они притягиваются друг к другу.

В природе существует множество частиц, которые обладают зарядами. Основными носителями отрицательных электрических зарядов являются электроны. Значение массы электрона $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг. Основными носителями положительных зарядов являются протоны - частицы, которые являются составляющими ядер. Значение массы протона $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг. Теперь обсудим величину электрического заряда. Весь набор экспериментальных данных говорит о том, что электрический заряд дискретен и всегда кратен одному и тому же числу. Минимальный заряд, который можно наблюдать в природе равен

$q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. **Кулон - единица измерения электрического заряда** (обозначение — Кл). Кулон не является основной единицей измерения в системе единиц СИ, а выражается через единицу измерения постоянного тока – Ампер. Это связано с тем, что точно измерять силу тока проще, чем измерять заряд. О том, как вводится единица силы тока, Вы узнаете при изучении взаимодействия проводников с током между собой (частный случай так называемых магнитных взаимодействий). Заряд электрона $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд протона имеет такую же величину по модулю, но противоположный знак $p = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Если рассматриваемая система замкнута (т.е. в систему не входят извне и не выходят наружу заряженные частицы), то весь набор экспериментальных данных говорит о том, что алгебраическая сумма всех зарядов остается неизменной. Таким образом, справедлив **Закон сохранения электрического заряда - в замкнутой системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной.** Отметим, что в замкнутой системе возможны взаимные превращения одних элементарных частиц в другие. При этом также алгебраическая сумма зарядов частиц до превращения будет равна алгебраической сумме зарядов частиц после превращения.

1.3 Закон Кулона

Закон взаимодействия двух точечных зарядов (материальных точек, обладающих зарядом) был открыт Шарлем-Августином Кулоном в 1785 году. Мы уже выяснили, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные - притягиваются. Конкретный характер описывается законом, носящим имя Кулона: **сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна произведению зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды**

$$F_c = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

где $k_e = 9 \cdot 10^9 \ \frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}$ - константа, значение которой приведено в системе СИ. На каждый заряд действует одинаковая по модулю сила, направленная вдоль прямой, соединяющей эти заряды. На Рис. 1.2 приведен пример взаимодействия положительного и отрицательного зарядов.

В векторной форме закон Кулона записывается в следующем виде (см. Рис. (1.3)):

$$\vec{F_{12}} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r_{12}}, \tag{1.2}$$

где $\vec{F_{12}}$ - сила, действующая со стороны первого заряда на второй. В знаменателе появляется третья степень расстояния, но она компенсируется дополнительным

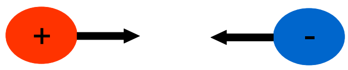

Рис. 1.2: Притяжение между разноименно заряженными частицами.

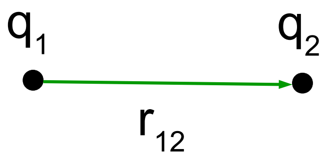

Рис. 1.3: Две заряженные частицы.

векторным множителем. В итоге, мы просто записали тот же закон Кулона, но уже используя векторные обозначения. В случае одноименных зарядов сила сонаправлена с вектором $\vec{r_{12}}$, в случае разноименных зарядов сила направлена в противоположную сторону. В законе Кулона важными являются следующие утверждения:

- Закон Кулона справедлив только для двух зарядов. Для расчета силы взаимодействия большего числа зарядов необходимо будет использовать принцип суперпозиции.

- В законе Кулона утверждается, что заряды должны быть неподвижными, что является важным условием. Если заряды движутся, то будут возникать дополнительные магнитные эффекты, которые мы в данном курсе не рассматриваем.

- Точечные заряды — это заряженные тела, размерами которых в условиях данной задачи можно пренебречь. Т.е. заряженные материальные точки. Закон Кулона можно применять и для равномерно заряженных сфер, подробнее об этом будет рассказано в следующем задании.

- Закон Кулона в том виде, в котором мы его сформулировали, применим только в вакууме. Случаи различных сред будут рассмотрены в дальнейшем.

На данный момент известно, что в природе существует 4 вида взаимодействия. Кроме электромагнитного присутствуют также гравитационное, сильное и слабое. Сильное взаимодействие отвечает за существование ядер, слабое за некоторые распады частиц. Для нас интерес представляет гравитационное взаимодействие, сравним его с электрическим. В микромире решающую роль играет электрическое взаимодействие. В этом легко можно убедиться, если рассмотреть силы гравитационного и электрического взаимодействия двух электронов, находящихся на расстоянии метр друг от друга. Гравитационное взаимодействие двух частиц массами m_1 и m_2 описывается формулой

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.3}$$

где $G = 6.7 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ в системе СИ. Вычисления рассмотрим в примере №1.

Пример № 1 *Два электрона находятся на расстоянии метр друг от друга. Найти отношения электрической и гравитационной сил взаимодействия.*

Решение

Сила электрического взаимодействия согласно формуле (1.1):

$$F_c = k_e\frac{e^2}{r^2} = 2.3 \cdot 10^{-28} Н.$$

Сила гравитационного взаимодействия согласно формуле (1.3):

$$F_g = G\frac{m_e^2}{r^2} = 5.5 \cdot 10^{-71} Н.$$

Отношение электрической и гравитационной сил равно:

$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{k_e e^2}{G m_e^2} = 4.2 \cdot 10^{42}.$$

Ответ: Сила электрического взаимодействия больше силы гравитационного взаимодействия в $4.2 \cdot 10^{42.}$ раз.

Заряд в 1 Кл является достаточно большой величиной. Если этот заряд локализован в малой области (для ясности выберем масштаб порядка метра или меньше), то будут возникать огромные силы, стремящиеся разделить данный заряд и разнести его части. Характерные значения, которые можно встретить, это $10^{-9} - 10^{-6}$ Кл.

1.4 Идея поля и силовые линии

Любая пара заряженных частиц q и Q взаимодействует друг с другом. Это значит, что отдельно взятая заряженная частица Q взаимодействует со всеми остальными заряженными частицами, а те, в свою очередь, между собой. Для простоты будем считать, что все заряды положительны.

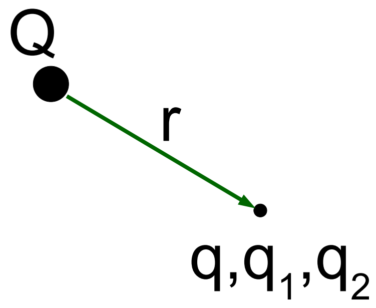

Рис. 1.4: Введение напряженности электрического поля.

Рассмотрим взаимодействие заряда Q со всеми остальными зарядами. Удобно такое взаимодействие описывать с помощью поля, которое создает заряд Q. Все остальные частицы находятся в поле, созданном данной частицей. В итоге, взаимодействие осуществляется посредством поля. Оказывается, что поле не просто удобная модель для описания взаимодействия, а реально существующий физический объект (правда, пока не особо привычный). Введем напряженность электрического поля – силовую характеристику, с помощью которой удобно находить силу, с которой поле действует на выбранную частицу в данной точке. Будем помещать в одну и ту же точку разные пробные (точечные заряды, величина заряда которой много меньше величины заряда Q) заряды (см. Рис. (1.4)). Выпишем силы согласно (1.1), которые действуют на эти заряды со стороны рассматриваемого заряда Q: на заряд q действует сила $F = k_e \frac{Q}{r^2} q$, на заряд q_1 действует сила $F_1 = k_e \frac{Q}{r^2} q_1$, соответственно на заряд q_2 действует сила $F_2 = k_e \frac{Q}{r^2} q_2$. В общем виде силу, действующую на произвольный заряд q, со стороны выбранного заряда Q можно записать в виде

$$F = Eq, \tag{1.4}$$

где $E = k_e \frac{Q}{r^2}$ - напряженность электрического поля в точке на расстоянии r, созданного зарядом Q.

В векторном виде напряженность записывается следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{E} q, \tag{1.5}$$

Изобразим напряженность с помощью силовых линий. С их помощью можно просто указывать направление и модуль напряженности. Существует два правила, которые необходимо знать. Во-первых, касательная к силовой линии в каждой точке совпадает с направлением напряженности. Во-вторых, густота указывает на значение модуля напряженности: число силовых линий, приходящихся на поверхность единичной площади, расположенной нормально к силовым линиям, можно считать пропорциональным модулю напряженности. На Рис. (1.5) показано произвольное поле в виде силовых линий, голубыми стрелками указаны вектора напряженности в двух точках. На Рис. (1.6) и (1.7)

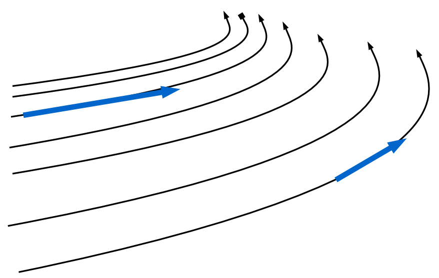

Рис. 1.5: Силовые линии произвольного поля.

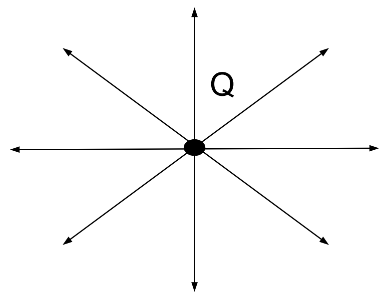

Рис. 1.6: Силовые линии одиночного положительного заряда.

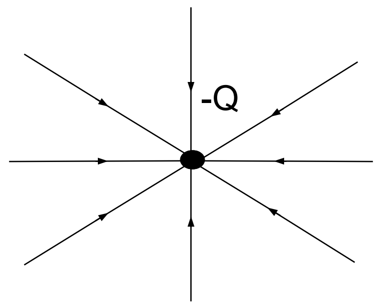

Рис. 1.7: Силовые линии одиночного отрицательного заряда.

указаны силовые линии одиночных положительного и отрицательного зарядов. У положительного заряда силовые линии направлены от заряда, а у отрицательного к заряду, в соответствии с направлением вектора напряженности электрического поля. Силовые линии не могут пересекаться, т.к. иначе в точке пересечения нельзя будет однозначно определить касательную к силовым линиям, и, соответственно, направление электрического поля, в то время как электрическое поля в данной точке существует и имеет вполне конкретное направление. Силовые линии электрического поля не замкнуты; они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

Подробное обсуждение силовых линий и их свойств будет произведено в следующей главе, посвященной теореме Гаусса.

1.5 Принцип суперпозиции

В предыдущем разделе мы рассмотрели поле одного точечного заряда, ввели напряженность электрического поля. Однако, как можно уже было догадаться, каждый точечный заряд создает электрическое поле. Чтобы найти силу, действующую на выбранный точечный заряд q со стороны всех остальных точечных зарядов q_1, q_2, q_3, ... нужно знать результирующую напряженность электрического поля (см. Рис. (1.8)). Результирующая сила, действующая на

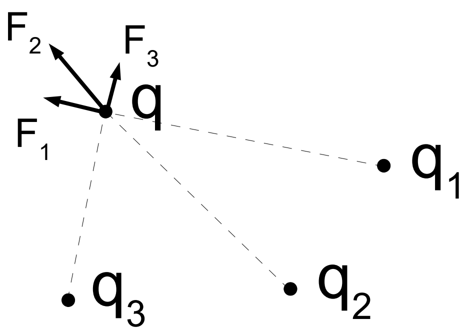

Рис. 1.8: Принцип супераозиции.

точечный заряд q со стороны всех остальных точечных зарядов:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots .$$

Можно записать с помощью напряженности поля, создаваемой каждым из зарядов:

$$\vec{F} = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots).$$

Тогда результирующая напряженность электрического поля записывается в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots .$$

Таким образом, результирующее поле равно векторной сумме полей, создаваемых каждым из зарядов. Подведем итог, **принцип суперпозиции гласит, что результирующее электрическое поле нескольких точечных зарядов равно векторной сумме электрических полей каждого точечного**

заряда. Важным моментом является тот факт, что заряды должны быть точечными. Результирующее поле равно сумме полей, создаваемых каждым из точечных зарядов. Т. е. поля отдельных зарядов не искажаются. Если рассматривать протяженные тела, то их поля изменятся в присутствие друг друга, т.к. заряды на телах в общем случае перераспределятся. Однако, результирующее поле по-прежнему равно векторной сумме полей отдельных тел (но поля изменяются в присутствие друг друга).

Принцип суперпозиции является фундаментальным законом природы. Наши дальнейшие рассуждения будут опираться на принцип суперпозиции и закон Кулона. Если говорить совсем грубо, то этого достаточно для построения всей теории электростатики.

Пример № 2 *В вершинах правильного треугольника со стороной a расположены одинаковые положительные заряды . Найти напряженность электрического поля в центре треугольника.*

Решение

Расстояние от вершины треугольника до центра $r = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогда напряженность, создаваемая одним зарядом, $E = k_e\frac{q}{r^2} = 3k_e\frac{q}{a^2}$. Каждый заряд создает одинаковое поле в центре. Угол между любой парой векторов равен 120°, значит их сумма равна 0.

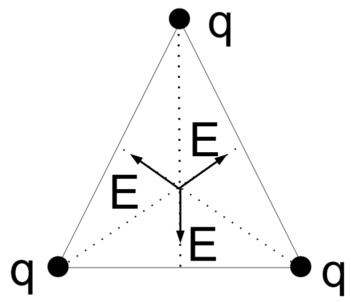

Рис. 1.9: Рисунок к примеру №2.

Ответ: Напряженность электрического поля в центре треугольника равна 0 (Данный ответ можно было легко получить, используя свойства симметрии задачи. Система симметрична относительно вращений вокруг центра на углы, кратные 120°. Тогда направление результирующего поля должно тоже обладать данной симметрией, а это возможно на плоскости только в случае нулевого вектора напряженности электрического поля).

1.6 Примеры решения задач

Пример № 3 *Какой заряд приобрел бы объем железа $V = 1$ см^3, если бы удалось убрать с каждого атома по одному электрону?*

Решение

Число атомов железа в $V = 1$ см^3 вещества равно

$$N_{Fe} = \frac{\rho_{Fe} V}{\mu_{Fe}} N_a,$$

где ρ_{Fe} - плотность железа, μ_{Fe} - молярная масса железа, N_a - число Авогадро. Тогда суммарный заряд электронов, который будет удален из вещества равен:

$$q = N_{Fe}e = \frac{\rho_{Fe}V}{\mu_{Fe}} N_a e,$$

т. к. число удаленных электронов равно числу атомов в веществе.

Ответ: Железо приобретет заряд равный заряду удаленных электронов, но с обратным знаком $q = -N_{Fe}e = -\frac{\rho_{Fe}V}{\mu_{Fe}} N_a e = 13.5 \cdot 10^6$ Кл. Данное значение является чрезмерно большим, если учесть малость заряда электрона.

Пример № 4 *Чему равна напряженность электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца радиуса R. Найти напряженность поля на оси кольца на расстоянии h от центра, если полный заряд кольца q.*

Решение

Т.к. мы знаем напряженность только для точечного заряда, то мысленно

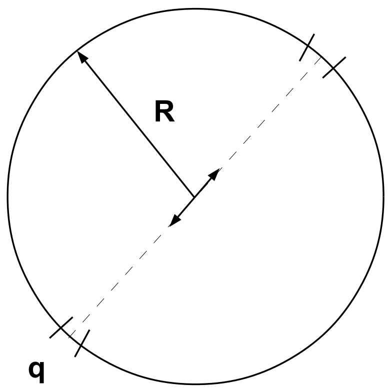

Рис. 1.10: К первой части примера 4.

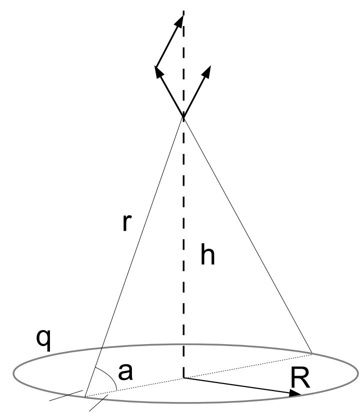

Рис. 1.11: Ко второй части примера 4.

разобьем кольцо на маленькие кусочки так, чтобы их можно было считать точечными зарядами (см. Рис. (1.10)). Для удобства разбиение будет на точечные заряды одинаковой величины. Напряженность отдельного точечного заряда в центре кольца направлена вдоль линии, соединяющей точечный заряд и центр кольца. Напряженность диаметрально противоположного точечного заряда будет компенсировать первую. Суммарная напряженность электрического поля в центре кольца будет равна нулю. Заметим, что данные рассуждения уже не применимы к любой другой точке.

Вычислим напряженность поля на оси (см. Рис. (1.11)). Как и прежде, диаметрально противоположные элементы компенсируют друг друга, но только по горизонтали. По вертикали вклады будут суммироваться и дадут окончательное выражение. Вклады от двух противоположных малых элементов кольца в вертикальном направлении для напряженности:

$$\Delta E = 2k_e \frac{\Delta q}{r^2} \sin\alpha,$$

где коэффициент 2 возник в силу того, что мы учитываем два элемента. $r = \sqrt{R^2 + h^2}$ - расстояние от данного элемента до точки на оси, α - угол между вектором напряженности элемента кольца и горизонталью, Δq - заряд малого элемента кольца (одинаковые для всех малых элементов кольца). Вклад от каждой пары диаметрально противоположных элементов кольца будет только вертикальным. Выполним суммирование для всех элементов кольца:

$$E = \sum \Delta E = 2k_e \frac{\sum \Delta q}{r^2} \sin\alpha = k_e \frac{q}{r^2} \sin\alpha.$$

Окончательно, после подстановки выражения для синуса угла, получаем ответ

$$E = k_e \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.,$$

где коэффициент 2 пропадает в силу того, что суммирование ведется по половине кольца (вторая половина учтена уже введенным множителем 2). Напряженность направлена вертикально.

Ответ: Напряженность электрического поля в центре кольца равна 0. Напряженность на оси кольца равна $E = k_e \frac{qh}{(R^2+h^2)^{3/2}}$ и направлена вдоль оси.

Пример № 5 *Два одинаково заряженных шарика массы m, подвешенных в одной точке на нити длины l, разошлись так, что угол между нитями стал прямым. Определите заряд шариков.*

Решение

Шарики не являются элементарными частицами, поэтому необходимо учитывать силу тяжести. Шарики находятся в равновесии, а значит векторная сумма всех сил, действующих на каждый шарик равна нулю. Выпишем проекции на вертикаль и горизонталь суммы сил, действующих на левый заряд:

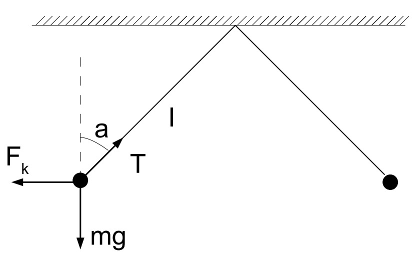

Рис. 1.12: Рисунок к примеру №5.

$$mg - T\cos\alpha = 0,$$

$$F_c - T\sin\alpha = 0.$$

По закону Кулона сила, действующая между зарядами, равна $F_c = k_e\frac{q^2}{r^2}$, где $r = 2l\sin\alpha$ - расстояние между зарядами, $\alpha = 45°$ - угол между нитью и вертикалью.

Решая уравнения, получим ответ

$$q = 2l\sqrt{\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{k_e}}$$

Ответ: Заряды шариков

$$q = 2l\sqrt{\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{k_e}}.$$