Окружность

Окружность – геометрическое место точек, удаленных на одно и то же расстояние R от заданной точки O, ее центра.

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью:

а) длина окружности $C = 2\pi R$;

б) площадь круга $S = \pi R^2$.

Угол между двумя радиусами окружности AO и BO называется **центральным** углом (рис. 1)

$$\angle BOA = \alpha.$$

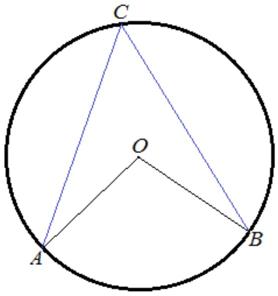

Рис. 1

Угол ACB, образованный двумя хордами CA и CB, исходящими из одной точки C окружности (рис. 2), называется **вписанным**.

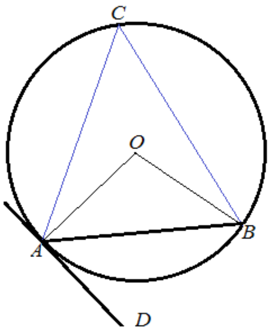

Рис. 2

Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла α, опирающегося на ту же дугу окружности

$$\angle BCA = \alpha/2.$$

Угол, образованный хордой, стягивающей дугу AB окружности с центральным углом α и касательной AD к окружности, проведенной через один из концов хорды, также равен $\angle BAD = \alpha/2$ (рис. 2). Т.о. $\angle BAD = \angle BCA$.

Радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна ее радиусу. В полном развернутом угле – 2π радиан.

Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Две дуги, заключенные между параллельными хордами равны.

Прямая называется **касательной** к окружности, если она имеет с окружностью только одну общую точку.

Теорема 1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. И наоборот, если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна ему, то она является касательной (рис. 3).

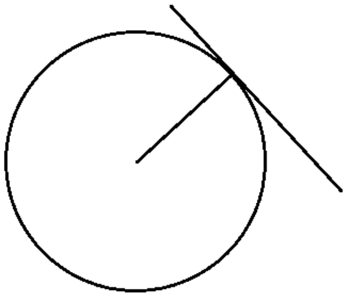

Рис. 3

Теорема 2. Диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен к ней и делит дугу, которую стягивает, пополам (рис. 4). И наоборот.

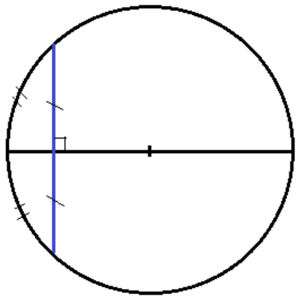

Рис. 4

Две окружности касаются друг друга, если имеют ровно одну общую точку.

Теорема 3. В точке касания окружности имеют общую касательную, перпендикулярную линии их центров (рис. 5).

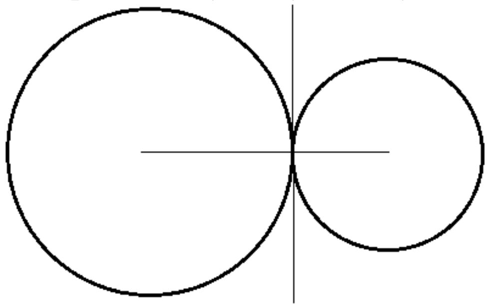

Рис. 5

Теорема 4. Если окружности пересекаются в двух точках, то соединяющий их отрезок перпендикулярен линии центров (рис. 6).

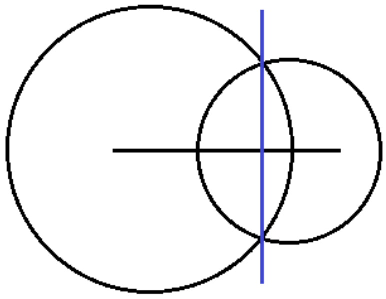

Рис. 6

Касание окружностей бывает внешним, когда каждая из окружностей во внешности другой окружности, и внутренним, когда одна из окружностей лежит внутри другой окружности.

Окружность, описанная около прямоугольного треугольника, имеет гипотенузу диаметром.

По теореме синусов для произвольного треугольника $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где a – сторона треугольника, α – противолежащий ей угол, R – радиус описанной окружности. Тогда площадь треугольника можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, где b и c – оставшиеся стороны треугольника.

Задача 1. Через точку L окружности проведена касательная и хорда LM длины 5. Хорда MN параллельна касательной и равна 6. Найти радиус окружности.

Решение.

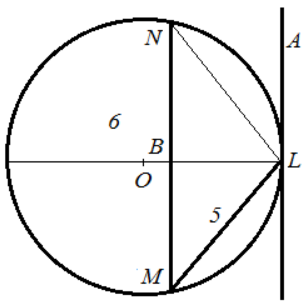

Рис. 7

Проведем радиус в точку касания. Т.к. верны теоремы 1 и 2, то $OL \perp LA$ и $NB = BM = 3$. Заметим также, что BL – медиана и высота, то треугольник MNL – равнобедренный, вписанный в данную окружность, тогда

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6\cdot 5\cdot 5}{4\sqrt{8\cdot 2\cdot 3\cdot 3}} = \frac{25}{8}.$$

Ответ. $25/8$.

Задача 2. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая касается первой окружности в точке B, а второй окружности в точке C. Найти BC, если $AB = b$, $AC = c$.

Решение.

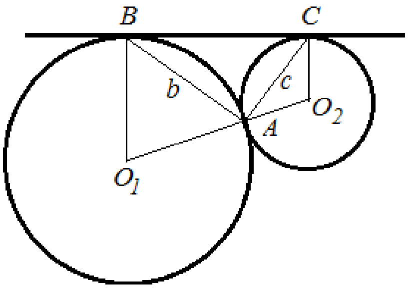

Рис. 8

1) $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$, т.е. $O_1B \parallel O_2C$;

2) $\angle CBA = \frac{1}{2}\angle BO_1A$ и $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle CO_2A$ как углы между хордой и касательной;

3) т.к. $O_1B \parallel O_2C$, то $\angle BO_1A + \angle CO_2A = \pi$, тогда $\angle CBA + \angle BCA = \frac{\pi}{2}$;

4) по теореме Пифагора находим $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Ответ. $\sqrt{b^2 + c^2}$.