Занятие 3. Геометрическая оптика

Закон преломления. Полное отражение. Преломление на сферической поверхности

Преломлением света на границе двух прозрачных сред называется изменение направления распространения луча при его переходе из первой среды во вторую. Преломление всегда сопровождается отражением: часть света отражается от границы назад в первую среду. Если граница раздела сред гладкая, направление отражённого луча подчиняется рассмотренному выше закону отражения от непрозрачных поверхностей.

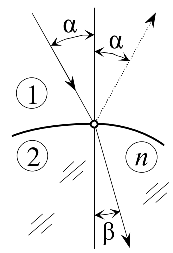

Рис. 1

Закон преломления[*] (на гладкой границе) устанавливает связь между направлениями падающего и преломлённого лучей и содержит три утверждения:

1) луч падающий, луч преломлённый и нормаль к границе, восставленная в точке падения луча, лежат в одной плоскости;

2) падающий и преломлённый лучи лежат по разные стороны от нормали[†]*;*

3) отношение синусов соответствующих углов есть величина постоянная, характерная для данной пары граничащих сред (рис.1):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \equiv \frac{n_2}{n_1} = \frac{c/\upsilon_2}{c/\upsilon_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}, \tag{1}$$

где n — относительный показатель (коэффициент) преломления второй среды относительно первой, равный отношению абсолютных показателей преломления данных сред. Под абсолютным показателем понимается «коэффициент замедления» света в данной среде, т. е. отношение скорости света c в вакууме к скорости света υ в среде. Чем больше абсолютный показатель преломления, тем оптически более плотной считается среда.

Из сказанного следует, что явление преломления (как и отражения) обратимо: если изменить направления обоих лучей на противоположные, т. е., преломлённый луч сделать падающим, а падающий преломлённым, все утверждения закона останутся в силе. Стало быть, если свет идёт из оптически более плотной среды в оптически менее плотную (снизу вверх на рис 1), то угол преломления α будет больше угла падения β. При увеличении β угол α будет расти быстрее и при некотором $\beta = \beta_{пред}$ α достигнет значения $\pi/2$, так что преломлённый луч станет «скользящим». Что произойдёт, если продолжать увеличивать β? При $\beta \ge \beta_{пред}$ преломлённый луч исчезает, остаются только падающий и отражённый лучи (рис. 2). Описанное явление называется полным отражением света (иногда его называют «полным внутренним отражением»), а угол $\beta_{пред}$ — предельным или наименьшим углом полного отражения. Из (1)

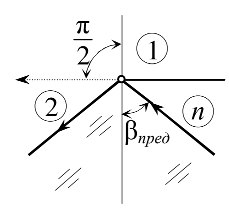

Рис. 2

$$\sin\beta_{пред} = \frac{\sin\pi/2}{n} = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Например, для воды $(n = 1{,}33)$ $\beta_{пред} \approx 48{,}6°$, для стекла $(n = 1{,}5)$ $\beta_{пред} \approx 41{,}8°$, для алмаза $(n = 2{,}4)$ $\beta_{пред} \approx 24{,}6°$.

---

[*] Его называют часто также законом Снеллиуса (Снелля или Снелла) по имени автора — голландского математика Виллеброрда Снелла.

[†] Существуют искусственно созданные в конце 90-х так называемые «левые» среды, в которых преломление происходит аномально: падающий и преломлённый лучи лежат по одну сторону от нормали. Мы, однако, такие ситуации как узко специфические сразу исключим из рассмотрения.

Замечание. Не следует думать, что при достижении углом β величины $\beta_{пред}$ в наблюдаемом явлении происходят какие-то скачкообразные изменения. По мере роста β меняется распределение энергии падающего луча между преломлённым и отражённым: доля первого *монотонно* падает, а второго растёт. При $\alpha \to \pi/2$ энергия преломлённого луча уменьшается до нуля и он плавно исчезает.

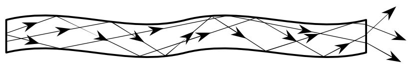

Рис. 3

На явлении полного отражения основан принцип действия, например, таких широко распространённых современных устройств, как световоды (рис. 3). Прозрачный твёрдый стержень заданной формы с гладкой боковой поверхностью или гибкая нить из стекловолокна освещается с одного из торцов световыми лучами, образующими малые углы с продольной осью системы. При каждом «касании» луча с боковой поверхностью он испытывает полное отражение, пока не дойдет до второго торца и не выйдет наружу. Таким образом осуществляется передача на расстояние световой энергии с весьма малыми потерями, что позволяет, скажем, освещать или рассматривать какие-либо труднодоступные места (например внутренние органы с помощью вводимого пациенту медицинского зонда). Стекловолокно используется также при изготовлении различных датчиков, в волоконно-оптической связи, рекламе и т. п.

Преломление на сферической поверхности. Пусть теперь границей раздела двух прозрачных сред является сфера радиусом R, причём с её *вогнутой* стороны находится среда с относительным показателем преломления n (рис. 4). Рассмотрим точечный источник S, расположенный с *выпуклой* стороны сферы. Соединим точки S и центр O сферы, проведя таким *образом главную оптическую ось* системы. Пустим под малым углом α к этой оси какой-либо луч, падающий от источника на сферу. Преломившись на её поверхности в точке M, луч пересечёт главную оптическую ось в некоторой другой точке S'. Считая все углы, изображённые на рис. 4, малыми, в законе преломления, написанном для точки M, синусы углов можно заменить самими углами (что уже отражено на рисунке). Применяя к треугольникам SMO и OMS' теорему о внешнем угле, запишем

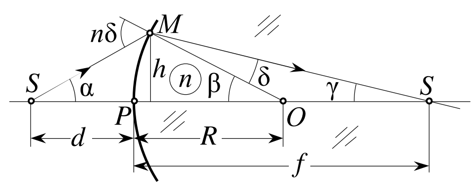

Рис. 4

$$\begin{cases} \alpha + \beta = n\delta, \\ \delta + \gamma = \beta. \end{cases}$$

Домножая второе равенство на n и складывая с первым, снова исключим «неприосевой» угол δ. Получим

$$\alpha + \beta + n\gamma = n\beta,$$

или

$$\alpha + n\gamma = (n-1)\beta.$$

Заменим в этом соотношении все углы их тангенсами, считая при этом точку P практически совпадающей с основанием высоты h:

$$\frac{h}{d} + n\frac{h}{f} = (n-1)\frac{h}{R},$$

или, по сокращении на h,

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f} = \frac{(n-1)}{R}. \tag{3}$$

Как и в формуле зеркала, высота h выпала из конечного соотношения, откуда следует, что все (приосевые) лучи, испущенные S, сойдутся в точке S', т. е. последняя является *изображением* источника. Выражение (3) называется *формулой преломления на сферической поверхности*.

Нетрудно убедиться, что и по отношению к этой формуле оказывается справедливым правило знаков, позволяющее использовать её в форме (3) в самом общем случае любых источников и изображений, а также границ раздела, выпуклых в любую сторону. Это правило, однако, имеет два формальных отличия от аналогичного правила для зеркала. Во-первых, поскольку данная система контактирующих сред работает «на просвет» а не на отражение, как зеркало, положительными считаются d и f, отложенные в *разные* стороны от сферической поверхности. И, во-вторых, как это следует из самого вывода формулы, $R > 0$ здесь соответствует не вогнутой поверхности, как у зеркала, а выпуклой, т. е. *обращённой своей выпуклостью навстречу падающему лучу*. Отметим ещё раз, что n — это показатель преломления *второй* среды (в которую луч проникает) относительно *первой* (из которой он идёт).

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать закон преломления. Что такое абсолютный и относительный показатели преломления?
2. В чём состоит явление полного отражения? Сформулировать условия полного отражения.
3. Меняются ли интенсивности отражённого и преломлённого лучей при увеличении угла падения? Если да, то как именно?
4. Что такое световод? Привести примеры применения световодов.
5. Получить формулу преломления на сферической поверхности. Сформулировать правило знаков.
6. Каковы формальные отличия правила знаков для формулы преломления на сферической поверхности от аналогичного правила для формулы сферического зеркала?

Примеры решения задач

1. Если рассматривать какой-либо предмет через треугольную призму, то изображение окажется смещённым. В какую сторону?

Решение

Поскольку призма (с относительным показателем $n > 1$) **всегда**, как это нетрудно понять, отклоняет прошедший через неё луч к основанию, изображение, очевидно, сместится к вершине призмы (рис. 5).

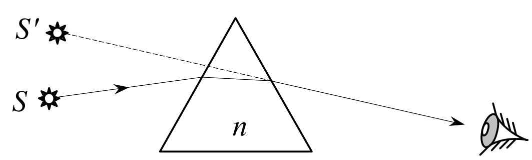

Рис. 5

2. Определить, во сколько раз истинная глубина водоёма больше кажущейся, если смотреть по вертикали вниз.

Решение

Рассмотрим расходящийся пучок, испущенный каким-либо маленьким участком S **освещённого** дна (например лежащим на дне камешком), попадающий в глаз (рис. 6; на рисунке для наглядности изображён большой угол между крайними лучами данного пучка — на самом деле он маленький). Вертикальный луч при выходе из воды не претерпит преломления, наклонный же, пересекая поверхность воды, «сломается» и пойдёт под бо́льшим к вертикали углом. Таким образом, эти лучи будут казаться исходящими из точки S', расположенной выше источника. Рассматривая два треугольника,

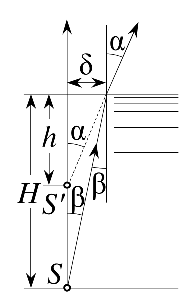

Рис. 6

«лежащих под водой», можно, очевидно, написать

$$\delta = h\,\mathrm{tg}\alpha = H\,\mathrm{tg}\beta,$$

откуда ввиду малости углов

$$h = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} H \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} H = \frac{H}{n},$$

т. е. кажущаяся глубина меньше истинной в n раз ($n = 1{,}33$ — относительный показатель преломления воды).

Замечание. Как явствует из наших рассуждений, расстояние δ между вышедшими из воды лучами выпало из конечной формулы. Это значит, что все наклонные лучи, испущенные точкой S и соответствующие различным δ, будут казаться исходящими из одной и той же точки S', т. е. S' является изображением точки S. Именно поэтому глаз всё дно под водой видит чётко.

3. Луч света падает на стеклянную призму с малым преломляющим углом θ. На какой угол φ он отклонится от своего первоначального направления, если угол падения луча также мал?

Решение

Пусть сначала луч падает (под малым углом) на плоскопараллельную пластинку. Тогда, очевидно, он вообще не отклонится от своего первоначального направления (рис. 7, луч 1). Наклоним теперь заднюю грань пластинки на малый угол θ, сделав из неё требуемую призму. На тот же угол повернётся и нормаль к этой грани. При этом преломление на передней грани не претерпит каких-либо изменений, а вот угол падения луча внутри пластинки на заднюю грань уменьшится на θ.

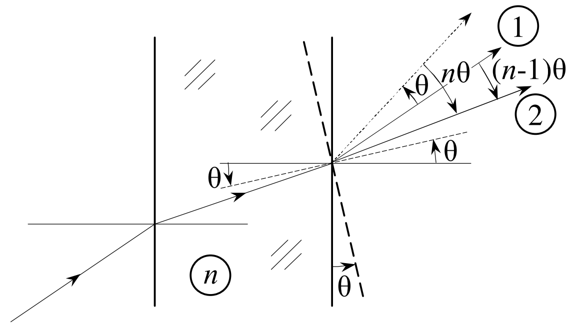

Рис. 7

Это изменение (вместе с поворотом задней грани) и вызовет искомое отклонение луча от первоначального направления. Если бы угол преломления луча на задней грани не изменился, то этот луч по выходе из призмы повернулся бы вместе с нормалью вверх на тот же угол θ (пунктирный луч на рис. 7). Но поскольку угол падения уменьшился на θ, угол преломления тоже уменьшится, причём, очевидно, на $n\theta$. Стало быть, выходящий луч «прижмётся» к нормали, **дополнительно** отклонившись вниз на угол $n\theta$. В итоге будет отклонение к основанию призмы (луч 2 на рис. 7) на угол

$$\varphi = (n-1)\theta. \tag{4}$$

4. Луч света падает изнутри на поверхность воды под углом, чуть превышающим предельный, и, стало быть, испытывает полное отражение. Какой показатель n_x должна иметь не смешивающаяся с ней жидкость, которую нужно налить на поверхность воды, чтобы «вытащить» падающий луч в воздух (рис. 8)?

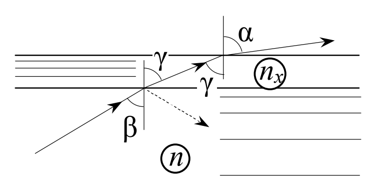

Рис. 8

Решение

Запишем закон преломления для двух имеющихся границ раздела сред и произвольного угла α (воспользовавшись принципом обратимости):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_x, \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{n}{n_x}.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,,$$

т. е. такую же связь между углами α и β, как и в случае отсутствия дополнительного слоя жидкости. Таким образом, слой этот **не может «извлечь»** из воды падающий луч, ибо, если бы это произошло, то данный луч выходил бы наружу и без дополнительного слоя, а этого по условию не происходит.

Замечание. Из приведённого решения следует, что наличие плоскопараллельного слоя (с любым показателем преломления), покрывающего границу раздела произвольной среды с **вакуумом** (**воздухом**), не влияет на результаты преломления или полного отражения падающего с любой стороны луча. Поэтому, анализируя данные эффекты на границе жидкости, налитой, скажем, в стеклянный сосуд, можно исключить из рассмотрения влияние на результат стенок сосуда, считая, что этих стенок как бы нет и жидкость контактирует непосредственно с воздухом.

В то же время, сформулированное утверждение оказывается неверным, если луч падает на границу раздела двух достаточно плотных сред (с показателями преломления, **бóльшими единицы**), идя из более плотной среды 1 и **не испытывая полного отражения**. В этом случае наличие промежуточного слоя может качественно изменить результат прохождения лучом границы. В самом деле, если угол β чуть меньше $\beta_{пред}$, то, взяв прослойку с показателем $n_x < n_2$, можно «не выпустить» луч из среды 1, ибо он испытает полное отражение на границе с прослойкой*.

5. На сферическую границу раздела двух сред радиусом *R* с выпуклой стороны падает сначала расходящийся, а затем сходящийся гомоцентрические пучки с центрами на главной оптической оси системы (см. рис 9, где каждый пучок представлен лишь одним своим лучом). Может ли расходящийся пучок после преломления стать сходящимся, а сходящийся — расходящимся, если относительный показатель преломления второй среды $n > 1$?

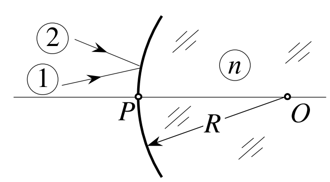

Рис. 9

Решение

Данная задача оказывается сложнее аналогичной со сферическими зеркалами (пример 2 занятия 2), и её целесообразно решать аналитически.

Для того чтобы расходящийся пучок, которому соответствует действительный источник, стал сходящимся, необходимо, чтобы изображение этого источника было тоже действительным, т. е. в формуле (3) *d* и *f* должны быть положительными. Из (3)

$$\frac{n}{f} = \frac{(n-1)}{R} - \frac{1}{d}\,, \tag{5}$$

и для того чтобы $\frac{n}{f} > 0$, необходимо, чтобы $(n-1)d - R > 0$, или

$$d > \frac{R}{n-1}\,,$$

т. е. расходящийся пучок становится сходящимся, если он расходится **слабо**, так что его центр расположен достаточно далеко от преломляющей поверхности. При меньших *d* пучок расходится **сильно** и после преломления остаётся расходящимся (*f* в формуле (3) становится отрицательным).

Сходящемуся падающему пучку соответствует мнимый источник ($d < 0$), а расхо-

---

* Действительно, для границы 1–2 $\sin\beta_{пред} = \frac{n_2}{n_1}$, для границы 1–*x* $\sin\beta'_{пред} = \frac{n_x}{n_1}$. Если $n_x < n_2$, $\beta'_{пред} < \beta_{пред}$ и угол падения β (меньший $\beta_{пред}$) может оказаться больше предельного $\beta'_{пред}$.

дящемуся преломлённому — мнимое изображение ($f < 0$). В этом случае формула (5) принимает вид

$$\frac{n}{f} = \frac{(n-1)}{R} + \frac{1}{|d|},$$

откуда следует, что при любых d $f > 0$. Это значит, что преломлённый пучок **всегда** оказывается сходящимся.