8 класс

Замечания о проверке: Каждая задача оценивается по семибалльной шкале. После решений указаны критерии — это типичные ошибки. Ваша ошибка могла быть уникальной и здесь не перечислена.

1. Секретный код представляет из себя восьмизначное число, все цифры которого различны и убывают слева направо. Кроме того известно, что это число делится на 180. Чему оно равно?

   Решение. Так как число делится на 10, последняя цифра заведомо равна нулю. Всего цифр десять, значит, в записи нашего числа встречаются все, кроме двух. Таким образом, предпоследняя цифра не больше трёх. Число делится на 4, а значит на 4 делится и число, составленное из двух последних цифр. Отсюда следует, что предпоследняя цифра чётна, то есть равна двум.

   Значит, в нашем числе не встречается цифра 1. Сумма всех цифр без единицы равна 44. Согласно признаку делимости на 9, сумма цифр нашего числа должна делиться на 9. Однако, единственная цифра, после вычитания которой из 44 получается число кратное 9, равна 8. Поэтому она тоже отсутствует в записи нашего числа.

   Ответ. 97654320.

   Критерии проверки. Только ответ без вразумительного обоснования оценивается в один балл.

   Ответ и тот факт, что число оканчивается на ноль — 2 балла.

   Ответ и тот факт, что число оканчивается на 20 — 3 балла.

2. За круглым столом сидят 2015 зайчиков и 2015 енотов. Докажите, что оба соседа какого-то зверя — еноты.

   Решение. Предположим противное.

   Для каждого енота рассмотрим зверя, сидящего от него через одного по часовой стрелке. Если бы он был енотом, то у соседа по часовой стрелке оба соседа были бы еноты. Значит через одного по часовой стрелке от каждого енота сидит заяц. Назовем этого зайца другом этого енота.

   Получается, что у каждого енота есть свой личный друг-заяц. Так как енотов и зайцев поровну, каждый заяц должен быть чьим-то другом.

   Занумеруем места за столом числами от 1 до 4030. Из доказанного следует, что если рассматривать четные места, то на них происходит чередование енот-заяц. Однако, четных мест 2015, то есть нечетное количество, а значит такое чередование невозможно. Противоречие.

   Критерии проверки. Разбор отдельных конкретных способов рассадки оценивался в ноль баллов.

3. Точка D лежит на медиане AM треугольника ABC. Через точку D провели прямую параллельную AB, а через точку C — прямую параллельную AM. Эти прямые пересеклись в точке X. Докажите, что $BD = AX$.

   Решение. Обозначим точку пересечения CX и BD через Y. По теореме Фалеса $BD = DY$, так как $BM = MC$.

   Из параллельности $\angle ADB = \angle XYD$ и $\angle DXY = \angle XDA = \angle DAB$. Значит треугольники ABD и XDY равны по одной стороне и углам.

   Тогда $AB = DX$. Вместе с параллельностью AB и DX отсюда следует, что $BAXD$ — параллелограмм. Значит $BD = AX$. Что и требовалось доказать.

4. Пусть a и b – целые числа. Известно, что для любого целого x выражение x^2+ax+b является квадратом целого числа. Докажите, что существует такое целое c, что $x^2+ax+b=(x+c)^2$.

   Решение. Соседними точными квадратами с числом n^2 являются $(n+1)^2=n^2+2n+1$ и $(n-1)^2=n^2-2n+1$. Поэтому верен следующий факт: для любого натурального n расстояние от числа n^2 до ближайшего квадрата равно $2n-1$.

   Рассмотрим два случая:

   (a) a четно, то есть $a=2k$, где k целое. Тогда $x^2+ax+b=(x+k)^2+b^2-k^2$. Если $d=b^2-k^2=0$, то $k=c$ и утверждение задачи доказано.

   Если $d\neq 0$, то возьмем x таким, чтобы $x+k>|d|+1$. В этом случае расстояние от $(x+k)^2$ до ближайшего квадрата не меньше $2(x+k)-1>2|d|>|d|$. Поэтому число $(x+k)^2+d$ квадратом не является. Противоречие.

   (b) Пусть a нечетно, то есть $a=2k+1$. Тогда $x^2+ax+b=(x+k)^2+x+b-k^2$. Обозначим $d=b-k^2-k$, получим $(x+k)^2+x+k+d$. Возьмем $x+k>|d|+2$. Тогда расстояние от $(x+k)^2$ до ближайшего квадрата не меньше $2(x+k)-1>x+k+|d|$. Поэтому $(x+k)^2+x+k+d$ квадратом не является. Противоречие.

   Критерии проверки. Если доказано, что такое c существует свое для каждого x, ставилось ноль баллов.

   Если разобран случай только четного a, ставилось 4 балла.

5. Есть набор гирек с массами от 1 до 100 грамм. Докажите, что среди любых 16 гирек из этого набора можно выбрать две пары гирек, сумма в которых одна и та же.

   Решение. Равенство $a+b=c+d$ можно переписать как $a-c=d-b$ (без ограничения общности считаем, что $a>c$ и $d>b$). Значит, достаточно найти две пары гирек с одинаковой разностью масс. Возможных разностей всего 99, а пар гирек $\frac{16\cdot 15}{2}=120$. Поэтому по принципу Дирихле найдутся две пары гирек с одинаковой разностью. Если в этих парах все четыре гирьки различные, то утверждение задачи доказано.

   Но также возможен случай, когда в этих парах есть общая гирька, то есть $c=d$ (из $a=d$ или $c=b$ следовало бы, что пары гирек совпадали; случай $a=b$ абсолютно аналогичен случаю $c=d$). В этом случае назовем гирьку c средней для тройки a,c,b. Если гирька является средней для троек a_1,c,b_1 и a_2,c,b_2, то $a_1+b_2=a_2+b_1$. Однако, таких троек будет хотя бы $120-99=21$, то есть какая-то гирька окажется средней в двух тройках по принципу Дирихле.

   Критерии проверки. Если не учтена возможность того, что пары имеют общую гирьку, ставилось два балла.