Третий тур. Девятый класс

Замечания о проверке: Каждая задача оценивается по семибалльной шкале. После решений указаны критерии — это типичные ошибки. Ваша ошибка могла быть уникальной и здесь не перечислена.

1. Найдите все натуральные значения N, при которых число 4100 при делении на N даёт остаток 5, а при делении на $N+1$ – остаток 4.

   Ответ: 7, 15, 63 и 4095.

   Решение. Число 4100 при делении на N даёт остаток 5, поэтому $4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ делится на N.

   4100 при делении на $N+1$ даёт остаток 4, поэтому 4096 делится на $N+1$. $4096 = 2^{12}$, поэтому $N+1$ – степень двойки. Из условия также ясно, что $N > 5$. Поэтому $N+1$ может равняться 8,16,32,64,128,256,512,1024,2048, 4096. Тогда N может равняться 7,15,31,63,127,255,511,1023, 2047,4095. Среди этих значений только 7, 15, 63 и 4095 делят 4095.

   Критерии проверки. За наличие хотя бы трёх правильных ответов ставился 1 балл.

   За решение задачи в предположении, что 91 является простым числом, ставилось не более 2 баллов.

2. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle DAC = \angle DBE$, $\angle ACE = \angle BEC$. Докажите, что если $AC < BE$, то $AD < BD$.

   Решение. Пусть диагонали AC и BE пересекаются в точке X. В треугольнике CXE $\angle XCE = \angle XEC$, поэтому он равнобедренный и $XC = XE$. $AX = AC - XC < BE - XC = BE - XE = BX$, откуда следует, что $\angle ABX < \angle BAX$ (т.к. в треугольнике ABX напротив большей стороны лежит больший угол). Тогда $\angle ABD = \angle ABX + \angle DBX < \angle BAX + \angle DBX = \angle BAX + \angle DAX = \angle DAB$. В треугольнике ABD напротив большего угла лежит большая сторона, т.е. $BD > AD$, что и требовалось.

3. Восемь учеников 11"Ж"класса смотрели восьмисерийный сериал. Оказалось, что каждую серию видело ровно пятеро из них. Докажите, что найдутся два таких ученика, что каждую серию смотрел хотя бы один из них.

   Решение. Назовём *просмотром* факт того, что конкретный ученик смотрел конкретную серию. Так как каждую из восьми серий видело пять человек, то всего было $5 \cdot 8 = 40$ просмотров. Так как учеников всего 8, то у какого-то из них было хотя бы 5 просмотров (иначе, если бы у каждого было не более 4, то всего просмотров было бы не более $4 \cdot 8 = 32$). Выберем ученика, смотревшего серий не меньше, чем все остальные (самого *смотрящего*, так сказать). Он смотрел не менее 5 серий. Выберем ему в пару одного из оставшегося семи учеников так, чтобы выполнялось утверждение задачи. Возможны несколько случаев.

   1. Самый смотрящий ученик смотрел 8 серий. Тогда выберем ему в пару любого из оставшегося учеников.

   2. Самый смотрящий ученик смотрел 7 серий. Тогда выберем ему в пару любого из учеников, смотревшего оставшуюся восьмую серию.

   3. Самый смотрящий ученик смотрел 6 серий. Каждую из оставшихся несмотренных им двух серий видело по 5 человек. Два этих множества из пяти человек должны пересекаться по какому-то ученику (иначе учеников будет хотя бы 10). Тогда выберем в пару самому смотрящему ученика, смотревшего эти две серии.

   4. Самый смотрящий ученик смотрел 5 серий. Каждую из оставшихся несмотренных им трёх серий видело по 5 человек. Три этих множества из пяти человек должны пересекаться по

какому-то ученику (иначе, если каждый из семи оставшихся учеников смотрел не более двух серий из этих трёх, то всего эти 7 учеников по этим 3 сериям набрали не более $7 \cdot 2 = 14$ просмотров, а их должно быть $3 \cdot 5 = 15$). Тогда выберем в пару самому смотрящему ученика, смотревшего эти три серии.

Критерии проверки. За разбор случая, когда каждый ученик смотрел ровно 5 серий, ставилось 5 баллов.

4. Последовательность чисел $\{a_i\}$ определена следующими условиями: $a_1 = 100$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ для всех натуральных $n > 1$. Найдите $[a_{2015}]$. (Как обычно, $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ: 118.

Решение. Очевидно, что все члены последовательности – положительные числа, и что последовательность возрастает, поэтому все члены не меньше 100. Возведём равенство $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ в квадрат: $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2}$. Тогда $a_{n-1}^2 + 2 < a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \leqslant a_{n-1}^2 + 2 + 0,0001$.

Теперь можно оценить a_{2015}^2 сверху и снизу:

$a_{2015}^2 > a_{2014}^2 + 2 > a_{2013}^2 + 2 \cdot 2 > \ldots > a_1^2 + 2 \cdot 2014 = 10000 + 4028 = 14028$, и

$a_{2015}^2 \leqslant a_{2014}^2 + 2 + 0,0001 \leqslant a_{2013}^2 + 2 \cdot 2 + 0,0001 \cdot 2 < \ldots \leqslant a_1^2 + 2 \cdot 2014 + 0,0001 \cdot 2014 = 14028,2014$.

Итак, $118^2 = 13924 < 14028 < a_{2015}^2 \leqslant 14028,2014 < 14161 = 119^2$, откуда получаем ответ 118.

5. В свободные клетки шахматной доски по одной выставляются чёрные и белые ладьи. Чёрная выставляется на поле, побитое в этот момент чётным количеством ладей, а белая – на поле, побитое нечётным числом ладей. Какое наибольшее количество из 64 выставленных ладей могут оказаться белыми?

Ответ: 62.

Решение. Первая выставленная ладья должна быть чёрной (её поле бьют 0 ладей). Ладья, занимающая последнюю незанятую угловую клетку, также обязана быть чёрной (её поле бьют две ладьи). Значит, есть хотя бы две чёрных ладьи, откуда следует, что белых не более 62.

Пример на 62 белых ладьи приведён на рисунке (сначала ладья выставляется на 1-ю клетку, затем на 2-ю и т.д.). Все ладьи, кроме 1-й и 58-й, являются белыми.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	12	13	14	15	16	17	11
19	20	21	22	23	24	25	10
18	28	29	30	31	32	33	27
35	36	37	38	39	40	41	26
34	44	45	46	47	48	49	43
51	52	53	54	55	56	57	42
50	59	60	61	62	63	64	**58**

Критерии проверки. За доказательство оценки (без примера), ставилось 3 балла.

За правильный пример (без оценки) ставилось 3 балла.