Третий тур. 10 класс.

Замечания о проверке: Каждая задача оценивается по семибалльной шкале.

1. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2+bc+ac=15-ab$. Найдите все возможные значения a, b и c.

   Решение. Перепишем выражение в виде $(a+b)(a+c)=15$. Число 15 раскладывается на множители двумя способами: $1\cdot 15$ и $3\cdot 5$. Первый невозможен, так как каждый из множителей должен быть суммой двух натуральных, то есть не меньше двух.

   Таким образом, $a+b=3$ и $a+c=5$ или $a+b=5$ и $a+c=3$. В обоих случаях $a=1$ или $a=2$.

   Ответ: $(1,2,4)$, $(2,1,3)$, $(1,4,2)$ и $(2,3,1)$.

2. Найдите все x из интервала $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ такие, что:

$$\frac{-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}}{\cos x}=4$$

   Решение. Домножим обе части на $\sin x\cos x$ и разделим на 2:

$$\frac{-1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

   Левая часть этого уравнения по формуле синуса разности может быть преобразована в $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

   Так как синусы $2x$ и $x-\frac{\pi}{6}$ равны, либо $2x=x-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, либо $2x+x-\frac{\pi}{6}=\pi+2\pi k$. Первое невозможно при $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Преобразовав второе, получим $x=\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}$. В нашем интервале лежит ровно одно число такого вида: $\frac{7\pi}{18}$.

   Ответ: $\frac{7\pi}{18}$.

3. Сколько всего различных чисел в последовательности:

$$\left[\frac{1^2}{2015}\right],\left[\frac{2^2}{2015}\right],\ldots,\left[\frac{2015^2}{2015}\right]?$$

   (через $[x]$ обозначается целая часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x)

   Решение. Изучим разность между соседними числами в этой последовательности:

$$\frac{(n+1)^2}{2015}-\frac{n^2}{2015}=\frac{2n+1}{2015}$$

   Легко видеть, что при $n<1007$ соответсвующие числа отличаются меньше, чем на один, а значит из целые части или являются соседними числами, или совпадают. Таким образом, в нашей последовательности встретятся все числа от 0 до $\left[\frac{1007^2}{2015}\right]=503$. После этого момента разность будет больше единицы, то есть целые части заведомо будут отличаться, а это даст нам ещё 1008 чисел.

   Ответ: 1512.

4. В Табулистане есть столица и ещё 1893 города, занумерованных числами от 1 до 1893. Столица соединена дорогой со всеми городами. Кроме того, первый соединен со вторым, второй с третьим, третий с четвертым, ..., 1892-ий с 1893-им, 1893-ий с первым. Король и премьер-министр играют в игру. Каждый своим ходом устраивает праздник в свою честь в двух соединенных дорогой городах, где до этого праздника не устраивалось. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает независимо от ходов соперника, если начинает король?

   Решение. Выигрывает премьер-министр, опишем стратегию для него.

   Будем считать, что нестоличные города занумерованы по циклу $1, 2, \ldots, 1983$. С точностью до симметрии у короля есть два варианта первого хода:

   (a) устроить праздник в столице и городе №1. Тогда министр устраивает праздник в городах 947 и 948.

   (b) устроить праздник в двух нестоличных городах. Можно считать, что они имеют номера 947 и 948. Тогда министр устраивает праздник в столице и городе номер 1.

   В результате получается две цепочки по 946 городов в каждой. Теперь министр просто ходит симметрично королю в те же по города, но в другую цепочку.

   Ответ: премьер-министр.

5. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка D. Известно, что $\angle CBD - \angle ABD = 60^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$ и $AB \cdot BC = BD^2$. Найдите углы треугольника ABC.

   Решение.

   (a) Обозначим $\angle ABD = \alpha$. Тогда $\angle CBD = 60^\circ + \alpha$, $\angle BCD = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BAD = 30^\circ - \alpha$.

   (b) Опустим из B высоту BF на сторону AC и отметим на луче BF точку E такую, что $BE = BD$. Из суммы углов треугольника BFD следует, что $\angle FBD = 60^\circ$.

   (c) Треугольник EBD равнобедренные и имеет угол 60° при вершине, а значит он равносторонний.

   (d) DF — биссектриса в EBD, а значит она медиана и высота. Таким образом, $BF = FE$.

   (e) $\angle CBE = \angle DBA$ и $\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{BD}$ (из условия $BD^2 = AB \cdot BC$ и $BE = BD$), а значит треугольники CBE и DBA подобны.

   (f) $\angle BDA = 150^\circ$, а значит в силу подобия $\angle BCE = 150^\circ$. Тогда $\angle ECF = 60^\circ + \alpha$.

   (g) Так как треугольники CBF и CEF равны, $90^\circ - \alpha = 60^\circ + \alpha$, откуда $\alpha = 15^\circ$.

   Угла треугольника теперь легко вычисляются: 15°, 90° и 75°.

   Ответ. 15°, 90° и 75°.