Третий тур олимпиады для 9-10 классов (решения и критерии проверки)

Один файл с решениями всех заданий – 1 балл, если, дополнительно, все решения, включая формулы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), то еще 1 балл.
Каждое задание само по себе вне зависимости от способа оформления оценивается из 6 баллов. В том числе баллы снимаются за недостаточную строгость обоснования.

1. *а*) Найдите основание *x* системы счисления, если известно: $2002_x = 130_{10}$.
   б) Найдите наименьшие основания *x* и *y* систем счисления из условия $51_x = 15_y$.
Приведите подробное решение каждого задания. Эффективные решения оцениваются выше.

Решение.
а) Переводим 2002 в 10-ю систему счисления:
$2*x^3+2*x_0=130$
$2*x^3+2=130$
$2*x^3=128$
$x^3=64$
$x=4$
4 > 2 (цифра 2 должна быть в алфавите данной системы счисления)
Ответ: 4 (3 балла).
Перебор оснований, начиная с 3х – 2 балла, начиная с двух – 1 балл.
б) Запишем числа в виде суммы разрядных слагаемых
$5x+1=y+5$ =>
$5x – 4 = y$
В записях чисел 51_x и 15_y есть цифра 5, значит $x>5$ и $y>5$
Для минимально допустимого *x*, равного 6, $y = 26$.
Ответ: x=6; y=26.
Ответ с $x < 6$ – 0 баллов, перебор, начиная с 6 в развернутой форме – 3 балла, при недостаточном обосновании ответа – 2 балла.

2. Сколько различных четырехбуквенных “слов” можно составить из слова ИНФОРМАТИКА? Ответ обосновать.
Решение.
Слов, в которых каждая буква встречается 1 раз: 9*8*7*6, две буквы И могут стоять на 6 разных парах мест, остальные места будут занимать две другие различные буквы, аналогично с буквой А, поэтому слов, в которых две буквы одинаковые, а остальные разные – 2*6*8*7. Наконец, существует 6 слов только из букв А и И, т.к. буквы А мы можем поставить 6ю способами.
Ответ: 9*8*7*6+6*8*7*2+6 = 3702
Можно пытаться решать и с вычитанием посчитанных дважды значений из 11*10*9*8.
Критерии: Верная формула и ответ, или ответ, посчитанный программой, которая приведена – 6 баллов.
Пример программы на *Python*
```
s='informatika'
ss = set()
for i in range(len(s)):
    for j in range(len(s)):
        if i != j:
            for k in range(len(s)):
                if i != k != j:
                    for l in range(len(s)):
                        if k != l != i and l != j:
                            ss.add(s[i]+s[j]+s[k]+s[l])
print(len(ss))
```
Верные рассуждения и формула, ошибка в арифметике 4-5 баллов. Верные части формулы 1-2 балла.

3. “Торговец принес на рынок мешок грецких орехов. Все орехи были одинаковые. Первый покупатель купил один орех, второй — два ореха, третий — четыре и так далее: каждый покупатель покупал вдвое больше орехов, чем предыдущий. Орехи, купленные последним покупателем, весили 50 кг, после чего у торговца остался один орех.

Постарайтесь привести и обосновать ответы на следующие вопросы:
1) сколько покупателей могли купить орехи;
2) сколько килограммов орехов было у торговца вначале?
Допустим, что всего орехи купили n покупателей.
Решение. Так как по условию орехи, купленные последним, n-м покупателем, весили 50 кг, то это значит, что 50 кг весили 2^{n-1} орехов. С другой стороны, все n покупателей приобрели $2^n - 1$ орехов, после чего еще остался один орех, то есть общее число орехов у торговца вначале — 2^n. Последнее значение больше 2^{n-1} в 2 раза, то есть все орехи, которые были у торговца, весили $50 \times 2 = 100$ кг ровно.

Теперь о первом искомом значении.
Обозначим массу одного ореха — m. Мы знаем, что $m \times 2^n = 100\,000$ г, при этом n — целое число. Такую задачу можно решить, используя электронную таблицу или программу. Приняв, что масса одного ореха может быть от 5 до 20 г, можно получить на листе общий вес орехов в килограммах при том или ином числе покупателей n. И оказывается, ровно 100 кг получаются только при массе ореха от 6 до 7 грамм или от 12 до 13. В первом случае число покупателей 14, во втором – 13.
Критерии.
1) Получены оба ответа при аналогичных рассуждениях – 4 балла, получен один из этих ответов или доп. ответ с менее правдоподобной массой ореха – 3 балла. Абстрактные формульные рассуждения – 2 балла. Неверный ответ при наличии верных рассуждений – 1 балл
2) Ответ 100 ровно – 2 балла, число близкое к 100 (в случае, когда ответ получен путем вычислений над дробной массой ореха, полученной в п. 1 – 1 балл.

4. Читальный зал школьной библиотеки часто посещается учениками на переменах. Для того, чтобы легко было найти среди множества книг нужную, они упорядочены по алфавиту (книги могут повторяться). Ученики часто зачитываются книгами до самого звонка и, к сожалению, не всегда ставят их на нужное место. В итоге, после перемены книги стоят на полке совсем не по алфавиту, и библиотекарю приходится тратить много времени для того, чтобы все привести в порядок.

Ребята пожалели библиотекаря и на кружке юных электронщиков создали робота-помощника. Так как они еще только учились делать серьезные вещи, то робот умел делать далеко не все, что хотелось бы, а точнее только следующие действия:

- прочитать и запомнить названия книг и их расположение;
- брать сразу две или три рядом стоящие книги и ставить их в том же порядке в начало полки (брать одну книгу или более трех он не может).

После перемены на одной из полок книги расположились следующим образом

Покушение на власть
Война и мир
Цель жизни
Война и мир
Цель жизни
Приключения Оливера Твиста

Напишите набор команд, которые должен выполнить робот, чтобы все книги расположились по алфавиту.

Каждое действие робота записывается в отдельной строке в виде двойки чисел $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{y}$, отделённых друг от друга пробелом. Такая запись означает, что робот должен взять книги, начиная с номера $\boldsymbol{x}$ и заканчивая номером $\boldsymbol{y}$ и поставить их в начало полки. Здесь под номером книги подразумевается, какой по счёту от начала стоит книга в текущий момент. Затем приводится состояние полки после выполнения данной команды. Затем указывается следующая команда и т.д.

Чем меньше команд вы используете, тем выше будет балл.

Решение:

Задачу можно решить за 4 хода:

4 6

Война и мир	Цель жизни	Приключения Оливера Твиста	Покушение на власть	Война и мир	Цель жизни

3 5

Приключения Оливера Твиста	Покушение на власть	Война и мир	Война и мир	Цель жизни	Цель жизни

2 4

Покушение на власть	Война и мир	Война и мир	Приключения Оливера Твиста	Цель жизни	Цель жизни

2 3

Война и мир	Война и мир	Покушение на власть	Приключения Оливера Твиста	Цель жизни	Цель жизни

За каждый лишний ход в верной сортировке минус 1 балл. Неверные решения (сортировка не доведена до конца или отсортировано в обратном порядке оцениваются из 1-2 баллов).

5. У фокусника есть ящик, в который кладутся монеты: круглые, треугольные и квадратные. Если в ящике находятся две круглых монеты, то после одного переворачивания ящика вместо них в нем окажется одна квадратная, аналогично, две треугольные монеты превратятся в три круглых, а три квадратные – в четыре треугольные. Ящик можно переворачивать многократно, не вынимая монеты из него. Если количество монет в ящике перед поворотом не кратно указанным значениям, то их остаток не участвует в текущем превращении, но может быть использован в дальнейших переворотах. Сколько и каких монет получится в ящике, если в него положили 10 круглых монет, 6 квадратных и 8 треугольных монет, а ящик перевернули

а) 10 раз?

б) 1000 раз?

в) можно ли, переворачивая ящик, добиться сколь угодно большого числа монет одного вида, зависит ли это от начальной комбинации монет? (ответ обоснуйте)

а); б) после первого переворачивания получим 5■, 8▲, 12●

после второго 8■, 4▲, 12●

после третьего 8■, 8▲, 6●

после четвёртого 5■, 8▲, 12●

Получился цикл с шагом 3.

10/3=3(ост. 1), значит, после 10 переворачиваний в ящике будет 5■, 8▲, 12●

1000/3=333(ост. 1) значит, после 1000 переворачиваний в ящике будет 5■, 8▲, 12●

в) цикл длиной 3 получится и при любых других начальных значениях, поэтому бесконечное количество получить нельзя. Достаточно привести конкретные рассуждения при четных и нечетных кругах и треугольниках и различных остатках от деления на 3 у квадратов.

Критерии:

1) Правильный ответ, полученный любым способом – 2 балла
2) Правильный ответ с обоснованием (в том числе программа) – 2 балла, без обоснования – 1 балл
3) Строгое доказательство – 2 балла, нестрогое – 1 балл, верный ответ без обоснования, даже если указано, что будет цикл – 0 баллов.