Девятый класс

1. Сколько существует трёхзначных чисел, состоящих из различных цифр, у которых последняя цифра равна произведению первых двух?

   Решение. Если одна из первых двух цифр равна 0, то и последняя цифра тоже равна 0, но в числе все цифры должны быть различны. Значит, нулей в таких числах нет.

   Если одна из первых двух цифр равна 1, а вторая равна x, то и последняя цифра равна x, что опять же невозможно. Значит, единиц в таких числах тоже нет.

   Итак, первые две цифры различны, каждая из них не меньше 2, и в произведении они дают число, меньшее 10. Если ни одна из цифр не равна 2, то одна из них хотя бы 3, а другая хотя бы 4, но в произведении они дадут число, большее 10. Значит, хотя бы одна из первых двух цифр равна 2. Тогда другая равна 3 или 4. Таких чисел всего 4: это 236, 326, 248 и 428.

   Ответ: 4.

2. Прямая l не пересекает прямоугольник $ABCD$. Расстояния от точек A, B и C до прямой l равны 4 см, 1 см и 5 см соответственно. Найдите расстояние от точки D до прямой l.

   Решение. Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O – центре прямоугольника. Обозначим проекции точек A, B, C, D и O на прямую l за A_1, B_1, C_1, D_1 и O_1. Заметим, что AA_1C_1C – прямоугольная трапеция, и её средняя линия OO_1 равна полусумме её оснований $\frac{4+5}{2} = 4,5$. Аналогично, BB_1D_1D также является прямоугольной трапецией, и её средняя линия OO_1 равна $4,5 = \frac{1+DD_1}{2}$, откуда находим $DD_1 = 8$.

   Ответ: 8.

3. Андрей задумал натуральное число и нашёл его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

   Решение. Заметим, что соответствующие остатки не превосходят 2, 5 и 8 соответственно, и их сумма не превосходит $2 + 5 + 8 = 15$. При этом, равенство достигается только тогда, когда они именно равны 2, 5 и 8. Отсюда следует, что число Андрея, увеличенное на 1, будет делиться на 3 (так как остаток задуманного числа при делении на 3 был $3 - 1$). Аналогично, оно будет делиться и на 6, и на 9, то есть оно делится и на НОК[3,6,9] $= 18$. Поскольку число Андрея на 1 его меньше, то оно даёт остаток $18 - 1 = 17$.

   Ответ: 17.

4. На острове рыцарей и лжецов каждого жителя спросили про каждого из остальных, лжец тот или рыцарь. Всего было получено 42 ответа «рыцарь» и 48 ответов «лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть на этом острове? (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду.)

   Решение. Пусть на этом острове N жителей, каждый из них дал $N - 1$ ответ, поэтому $N(N - 1) = 42 + 48 = 90$, откуда $N^2 - N - 90 = (N - 10)(N + 9) = 0$. Так как $N > 0$, то $N = 10$. Значит, всего на острове 10 жителей.

   Пусть на острове R рыцарей, тогда лжецов – $10 - R$. Ответ «рыцарь» каждый из рыцарей дал $R - 1$ раз (про каждого из остальных рыцарей), а каждый из лжецов – $9 - R$ раз (про каждого из остальных лжецов). Тогда $R(R-1)+(10-R)(9-R) = 42$, то есть $2R^2-20R+48 = 2(R-4)(R-6) = 0$, откуда $R = 4$ или $R = 6$. Оба эти ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях остальные $90 - 42 = 48$ ответов будут «лжец»). Значит, наибольшее количество рыцарей — это 6.

   Ответ: 6.

5. Окружности радиусов 4 и 9 касаются друг друга внешним образом в точке X, через которую проходит их общая касательная. Другая общая касательная пересекает её в точке Y. Найдите XY.

   Решение. Пусть O_1 и O_2 – центры меньшей и большей окружностей соответственно. Пусть также общая внешняя касательная l касается меньшей и большей окружностей в точках A и B соответственно. Тогда, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то прямая l перпендикулярна прямым AO_1 и BO_2.

   Общая внутренняя касательная перпендикулярна радиусам XO_1 и XO_2, поэтому точки O_1, X и O_2 лежат на одной прямой. Значит, $O_1O_2 = XO_1 + XO_2 = 4 + 9 = 13$.

   Пусть H – проекция точки O_1 на отрезок BO_2. Тогда $ABHO_1$ – прямоугольник, $AB = O_1H$ и $AO_1 = BH = 4$. Тогда $HO_2 = BO_2 - BH = 9 - 4 = 5$. Треугольник O_1HO_2 – прямоугольный, в котором гипотенуза O_1O_2 равна 13, а катет HO_2 равен 5. Тогда по теореме Пифагора оставшийся катет $O_1H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Значит, и длина отрезка AB также равна 12.

   Заметим, что $YA = YX$ как отрезки касательных из точки Y к первой окружности, $YX = YB$ как отрезки касательных из точки Y ко второй окружности. Тогда $XY = YA = YB = \frac{YA+YB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

   Ответ: 6.

6. Найдите все действительные a, при котором корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + x - a = 0$ удовлетворяют соотношению $(x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3 - 27 = 0$.

   Решение. По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -1$, а также $x_1x_2 = -a$.

   Отсюда, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 + 2a$, а также $x_1^3 + x_2^3 = (x_2 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -1 - 3a$, а значит $(x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3 - 27 = x_1^3 + x_2^3 + 6(x_1^2 + x_2^2) + 12(x_1 + x_2) + 8 + 8 - 27 = -1 - 3a + 6(1 + 2a) - 12 + 16 - 27 = 9a - 18 = 0$, откуда находим $a = 2$.

   Ответ: 2.