Математический анализ.

Д.В.Алексеев

Лекции и упражнения.

Оглавление

Часть I

Множества. Функции. Действительные числа.

Глава 1

Введение в теорию множеств.

Если вам за какую-либо помощь
обещают оказать множество
услуг, не забывайте, что
множество может быть пустым.

bash.org.ru

1.1 Определение и примеры множеств

Определение 1. **Множеством** называется набор объектов определенного рода. Множество считается заданным, если для любого объекта можно определить, принадлежит ли он этому множеству.

Определение 2. Множество, не содержащее никаких элементов, называют **пустым** и обозначают $\varnothing$.

Замечание. $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Если элемент a принадлежит множеству A, то это обозначают $a \in A$. Если элемент b не принадлежит множеству A, то это обозначают $b \notin A$. Если все элементы множества A принадлежат также и множеству B, то говорят, что A является **подмножеством** B и обозначают так: $A \subset B$ или $B \supset A$. Если, при этом, A не совпадет с B, то A называют **собственным подмножеством** A и обозначают[1] $A \subsetneq B$.

Если для любого элемента множества выполнено некоторое свойство, то это обозначают $\forall a \in A\,(\ldots)$. Если существует элемент множества, для которого выполнено некоторое свойство, то это обозначают $\exists a \in A\,(\ldots)$. Символы $\forall$ ("для любого") и $\exists$("существует") называют *кванторами.*

[1]В некоторых учебниках для обозначения подмножества используется символ $\subseteq$, а для обозначения собственного подмножества — символ $\subset$.

Пример 1. *Например определение подмножества $A \subset B$ можно записать так:* $\forall a \in A(a \in B)$.

Если надо задать множество объектов, обладающих некоторым свойством $\mathcal{P}$, то это обозначают $\{a \,|\, \mathcal{P}(a)\}$ или $\{a : \mathcal{P}(a)\}$. Символы «|» и «:» читаются как «такой, что».

1.2 Операции над множествами

Определение 3. Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называют множество, состоящее из всех элементов, входящих в A или B (см. рис. 1.1).

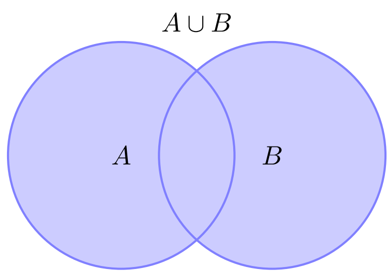


Рис. 1.1: Объединение множеств.

Определение 4. Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называют множество, состоящее из всех элементов, входящих как в A, так и в B (см. рис. 1.2).

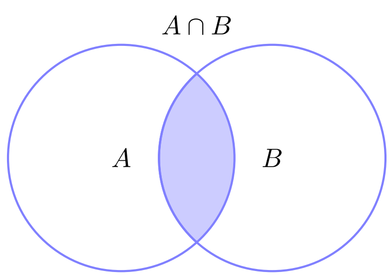


Рис. 1.2: Пересечение множеств.

Определение 5. Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называют множество, состоящее из всех элементов, входящих в A, и не входящих в B (см. рис. 1.3).

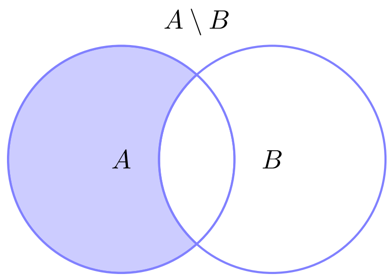


Рис. 1.3: Разность множеств.

Определение 6. Симметрической разностью множеств A и B (обозначается $A \triangle B$) называют множество, состоящее из всех элементов, входящих либо в A, либо в B (см. рис. 1.4). Она выражается через ранее введенные операции как $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

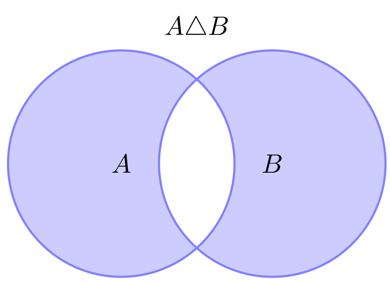


Рис. 1.4: Симметрическая разность множеств.

Определение 7. Во многих случаях мы имеем дело только с подмножествами некоторого множества E. Например, решая неравенство, мы имеем дело с подмножествами числовой оси $(-\infty, \infty) = E$. В таком случае множество E, содержащее все интересующие нас множества называется **объемлющим множеством** и можно определить операцию дополнения. **Дополнением** множества A (обозначается $\overline{A}$ называется множество точек объемлющего множества E, не принадлежащих A, т.е. $\overline{A} = E \setminus A$.

Пример 2. *Пусть* $A = [0, 1)$*, а объемлющее множество — вся числовая ось. Тогда* $\overline{A} = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

Определение 8. Декартовым произведением множеств A и B (обозначают $A \times B$) называют множество пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Если множества A и B совпадают, то используют обозначение $A^2 = A \times A$.

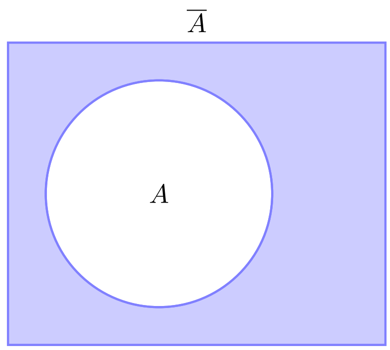


Рис. 1.5: Дополнение множества.

1.2.1 Свойства операций со множествами.

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1. $A \subset A$.
2. $A \subset B$, $B \subset C \rightarrow A \subset C$.
3. $A \subset B$, $B \subset B \rightarrow A = B$.
4. $\forall A\,(\varnothing \subset A)$.
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
7. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$; $A \cap B = A$.
8. $A \cup \bar{A} = E$
9. $A \cap \bar{A} = \varnothing$.
10. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
11. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
12. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Докажем, например, свойство 10. Пусть $x \in \overline{(A \cup B)}$, т.е. $x \notin (A \cup B)$, следовательно $x \notin A$ и $x \notin B$. А значит $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, откуда следует, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

С другой стороны, пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$,$x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A, x \notin$ $\notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{(A \cup B)}$. Таким образом любой элемент одного множества является элементом другого, а значит, множества $\overline{(A \cup B)}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$ совпадают.

Доказательство остальных утверждений 1–12 предоставляется читателю в качестве упражнения.

1.2.2 Индикаторная функция.

Для получения тождеств в теории множеств часто используется следующее понятие:

Определение 9. Индикаторной функцией (индикатором) множества A называется функция $I_A : M \to \{0,1\}$ заданная следующим образом: $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$, т.е. функция, равная единице на элементах множества A и нулю на всех остальных элементах объемлющего множества M.

Очевидно, что множества равны тогда и только тогда, когда их индикаторные функции равны при всех x.

Свойства индикаторной функции:

1. $I_A \equiv I_B \Leftrightarrow A = B$;
2. $|A| = \sum_{x\in M} I_A(x)$;
3. $I_{\bar{A}}(x) = 1 - I_A(x)$;
4. $I_{A\cap B}(x) = I_A(x) \cdot I_B(x)$;
5. $I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x) \cdot I_B(x)$;
6. $I_{A\setminus B}(x) = I_A(x) - I_A(x) \cdot I_B(x)$;
7. $I_{A\triangle B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - 2 \cdot I_A(x) \cdot I_B(x)$;
8. $B \subset A$, тогда и только тогда, когда $forallx I_B(x) \leqslant I_A(x)$.

С помощью индикаторной функции можно доказывать различные тождества. Например, докажем тождество 12 из раздела 1.2.1:

$$A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Запишем индикаторные функции для левой и правой части тождества: $f_1(x) = I_{A\triangle B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - 2 \cdot I_A(x) \cdot I_B(x)$ — по свойству 7; $f_2(x) = I_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}(x) = I_{(A\setminus B)}(x) + I_{(B\setminus A)}(x) - I_{(A\setminus B)}(x) \cdot I_{(B\setminus A)}(x) = I_A(x) - I_A(x)\cdot I_B(x) + I_B(x) - I_B(x)\cdot I_A(x)$ — по свойствам 5 и 6. Поскольку $f_1 \equiv f_2$, то множества тоже равны.

1.2.3 Формула включений-исключений

Теорема 1. *[Формула включений–исключений] Будем обозначать $|A|$ — количество элементов множества A. Тогда для произвольных множеств A_1,... A_n верна формула:*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

В частности, при $n = 2, 3$ верны формулы:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доказательство.
Из свойств 10-11 операций со множествами следует, что

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \overline{\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n}.$$

Поэтому для индикатора множества $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ выполнено

$$I_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - I_{A_i}\right).$$

Раскрыв скобки и сократив получим,

$$I_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \sum_{1 \le i \le n} I_{A_i} - \sum_{1 \le i < j \le n} I_{A_i} \cdot I_{A_j} + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} I_{A_i} \cdot I_{A_j} \cdot I_{A_k} - \ldots + (-1)^{n-1} I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot \ldots \cdot I_{A_n}.$$

Просуммируем по $x \in M$, получим:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{x \in M} I_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x) = \\ &= \sum_{x \in M} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} I_{A_i}(x) - \sum_{x \in M} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} I_{A_i}(x) \cdot I_{A_j}(x) + \\ &+ \sum_{x \in M} \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} I_{A_i}(x) \cdot I_{A_j}(x) \cdot I_{A_k}(x) - \ldots \\ &\ldots + \sum_{x \in M} (-1)^{n-1} I_{A_1}(x) \cdot I_{A_2}(x) \cdot \ldots \cdot I_{A_n}(x) = \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Пример 3. *Из 100 студентов университета английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?*

Решение. Обозначим все множество студентов буквой M, изучающих английский язык — буквой E, немецкий — D и французский — F. Тогда условие можно переформулировать на языке теории множестве: Дано $|M| = 100$, $|E| = 28$, $|D| = 30$, $|F| = 42$, $|E \cap D| = 8$, $|E \cap F| = 10$, $|D \cap F| = 5$ и $|E \cap D \cap F| = 3$. Надо найти $|M \setminus (E \cup D \cup F)|$. Применим формулу включений-исключений: $|E \cup D \cup F| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$, следовательно $|M \setminus (E \cup D \cup F)| = 20$. Ответ: 20 студентов.

Пример 4. *На кафтане площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$.*

Решение. Суммарная площадь всех заплат равна $\frac{5}{2}$. Пусть S_k — площадь, покрытая ровно k заплатами, тогда $S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 1$ и $S_1 + 2S_2 + 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 = \frac{5}{2}$.

Сумма площадей всех 10 попарных пересечений заплат равна $S_2 + 3S_3 + 6S_4 + 10S_5 \geqslant 2(S_1 + 2S_2 + 3S_3 + 4S_4 + 5S_5) - 3(S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) = 2$, поэтому хотя бы одно из 10 попарных пересечений заплат будет по площади не меньше $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

1.3 Парадокс Рассела

Для начала напомню одну старую загадку:

Парадокс брадобрея

> В некотором селе живет брадобрей, который бреет тех и только тех жителей, которые не бреются сами. Бреет ли он себя?

У этой загадки нет решения, т.к. условие противоречиво. Действительно, если предположить, что брадобрей бреет себя, то оказывается, что он входит в множество тех, кто бреет себя сам, следовательно не должен брить себя.

Если же он не бреет себя сам, то должен себя брить. В любом случае получаем противоречие.

Аналогичный парадокс был сформулирован выдающимся британским математиком Бертраном Расселом в 1901 году:

> Предположим, что существует множество всех множеств. Тогда некоторые его элементы являются членами самих себя (например, множество всех множеств), а некоторые — нет (например $\mathbb{N}$). Рассмотрим A — множество всех множеств, которые не являются элементами себя. Вопрос: принадлежит ли A множеству A?

Если допустить, что $A \in A$, то получается, что A не удовлетворяет условию, что множество не должно быть своим членом, а значит не должно принадлежать A. С другой стороны, если $A \notin A$, то оно удовлетворяет условию отбора, значит должно принадлежать A. В обоих случаях приходим к противоречию.

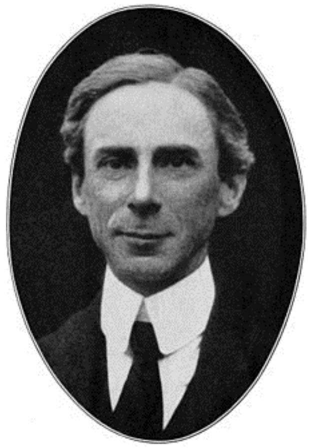


Рис. 1.6: Бертран Рассел (1872–1970)

Упражнения

Упражнение 1. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

Упражнение 2. В саду у Ани и Вити росло 2014 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

Упражнение 3. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией — 20, а математикой и биологией одновременно — 10?

Упражнение 4. В некотором царстве живут маги, чародеи и волшебники. Про них известно следующее: во-первых, не все маги являются чародеями, во-вторых, если волшебник не является чародеем, то он не маг. Правда ли, что не все маги – волшебники?

Упражнение 5. Баба Яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных. Все они, кроме двух, — Говорящие Коты; все, кроме двух — Мудрые Совы; остальные — Усатые Тараканы. Сколько обитателей в избушке у Бабы Яги?

Упражнение 6. В киоске около школы продается мороженое двух видов: «Лакомка» и «Эскимо на палочке». На перемене 24 ученика успели купить мороженое. При этом 15 из них купили «Лакомку», а 17 — «Эскимо». Сколько человек купили мороженое обоих сортов?

Упражнение 7. По данным опроса, проведенного в 9 «А» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 9 «А», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Упражнение 8. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

Упражнение 9. (Л.Кэррол) В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимально возможное число пиратов, потерявших сразу глаз, ухо, руку и ногу?

Упражнение 10. Ученики 9 класса решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I — решивших первую задачу, II — решивших только одну задачу, III — решивших по крайней мере одну задачу, IV — решивших обе задачи. a) Какой из списков самый длинный? b) Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

Упражнение 11. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно? Ответ обоснуйте.

Упражнение 12. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами, а каждый пятый день — решать задачи по математике. (В первый день Петя сделал и первое, и второе, и третье и очень устал.) a) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? b) Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

Упражнение 13. Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врет ли управдом?

Упражнение 14. (Н. Я. Виленкин, Рассказы о множествах)
Однажды во время беседы за чашкой кофе в клубе Межгалактических путешественников знаменитый член этого клуба, Мюнхгаузен космической

эры, Йон Тихий рассказал:
— Высадка на планету Гесиод была очень трудна. Но когда я оказался на поверхности, то пожалел, что решил опуститься: на ней жили чудовища, более страшные, чем описанные в древних мифах греков. Навстречу мне вышла делегация из 1000 жителей планеты. У 811 из них был один глаз, как у циклопа Полифема, у 752 — вместо волос были змеи, как у Медузы Горгоны, а 418 имели рыбий хвост, как нереиды. При этом 570 чудовищ были одноглазы и змееволосы, 356 — одноглазы и имели рыбий хвост, 348 — змееволосы и с рыбьим хвостом, а 297 — одноглазы, змееволосы и с рыбьим хвостом. Старший из них обратился ко мне и сказал...
Но члены клуба так и не узнали, что услышал Йон Тихий на планете чудовищ. Слушавший рассказ путешественника профессор Тарантога мгновенно произвел в уме какие-то выкладки и воскликнул:
— Дорогой Йон! Я готов поверить, что на этой планете жили существа с одним глазом, со змеями вместо волос и с рыбьими хвостами. Тебе приходилось встречать еще более страшных чудовищ — вспомни о курдлях. Но я надеюсь, что законы математики на этой планете не превратились в мифы.
Почему профессор Тарантога не поверил Йону Тихому?

Упражнение 15. * Антон, Борис и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

Упражнение 16. * Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

Упражнение 17. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

Упражнение 18. * В каждой комнате особняка стояли букеты цветов. Всего было 30 букетов роз, 20 — гвоздик и 10 — хризантем, причем, в каждой комнате стоял хотя бы один букет. При этом ровно в двух комнатах стояли одновременно и хризантемы, и гвоздики, ровно в трёх комнатах — и хризантемы, и розы, ровно в четырёх комнатах — и гвоздики, и розы. Могло ли в особняке быть 55 комнат?

Упражнение 19. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 300, которые делятся a) на 3? b) На 5? c) На 15? d) Не делятся ни на 3, ни на 5?

Упражнение 20. Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?

Упражнение 21. * Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

Упражнение 22. Пол комнаты площадью 6 м^2 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3 м^2. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2.

Упражнение 23. * Каждая сторона в треугольнике $\triangle ABC$ разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника $\triangle ABC$?

Упражнение 24. ** В прямоугольнике площади 1 расположено 5 фигур площади $\frac{1}{2}$ каждая. Докажите, что найдутся а) две фигуры, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{20}$; б) две фигуры, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$; в) три фигуры, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{20}$.

Упражнение 25. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 75% пола, другой зелёным — 70%, третий синим - 65%. Какая часть пола заведомо закрашена всеми тремя красками?

Упражнение 26. * Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру?

Упражнение 27. ** Доказать тождество:

$$|A_1 \triangle \ldots \triangle A_n| = \sum_i |A_i| - 2\sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \\ + 4\sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

— аналог формулы включений–исключений для симметрической разности.

Упражнение 28. ** Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n (числа называются взаимно простыми, если их НОД равен 1). Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — разложение n на простые сомножители. Докажите равенство

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right).$$

Упражнение 29. * Юра, Лёша и Миша коллекционируют марки. Количество Юриных марок, которых нет у Лёши, меньше, чем количество марок, которые есть и у Юры, и у Лёши. Точно так же, число Лёшиных марок, которых нет у Миши, меньше, чем число марок, которые есть и у Лёши и у Миши. А число Мишиных марок, которых нет у Юры, меньше, чем число марок, которые есть и у Юры и у Миши. Докажите, что какая-то марка есть у каждого из трех мальчиков.

Упражнение 30. * Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap, \cup, \setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или содержат по одному элементу.

Упражнение 31. * а) Сколько различных выражений для множеств A и B можно составить из переменных и с помощью операций $\cap, \cup, \setminus$? Два выражения считаются одинаковыми, если они верны при всех значениях переменных; б) тот же вопрос для трех множеств A, B и C; в) тот же вопрос для n множеств $A_1, \ldots, A_n$.

Упражнение 32. ** а) Сколько различных выражений для множеств A и B можно составить из переменных и с помощью операций $\cap, \cup$? Два выражения считаются одинаковыми, если они верны при всех значениях переменных; б) тот же вопрос для трех множеств A, B и C. *Замечание: Эта задача (немного в другой формулировке) называется «проблема Дедекинда». До сих пор не известен точный ответ для случая > 9 множеств.*

Ответы и указания

1) Философов. 2) 3. 3) 25. 4) Да, верно. 5) 3. 6) 8. 7) 26. 8) 10. 9) 10. 10) a) III список. b) Могут совпасть I и II, II и III, I и III или III и IV. 11) 8. 12) 24 в обоих пунктах. 13) Управдом врет, т.к. $25 + 30 + 28 - 18 - 17 - 16 + 15 = 47 > 45$. 14) $811 + 752 + 418 - 570 - 356 - 348 + 297 = 1004 > 1000$. 15) Трудных задач на 20 больше, чем легких. 16) Могло. 17) Доля голубоглазых среди блондинов. 18) Не могло. 19) a) 100. b) 60. c) 20. d) 160. 20) 1600. 21) Пусть A — множество точных квадратов, B — кубов, M — всех чисел от 1 до 1000000. Тогда $|A \cup B| = 1000 + 100 - 10 = 1090$ и $|M \setminus (A \cup B)| = 998910$. 22) Использовать формулу включений-исключений. 23) $7^3 - 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 - 1 = 216$. 24) См. решение примера 4. 25) 10%. 26) 356. 27) Рассмотреть индикаторные функции. 28) Если n кратно p, то $n \cdot (1 - \frac{1}{p})$ чисел, меньших n, не кратны p. 29) Использовать формулу включений-исключений. 30) Рассмотреть элемент, на котором нарушается тождество и отбросить все остальные. 31) a) 4. b) 8. c) 2^n. 32) a) 4. b) 18.

Глава 2

Функции. Графики.

Первый курс. Первая пара по мат. анализу в техническом вузе.
Преподаватель:
— Записываем тему: Действительная функция действительной переменной. Сюръективные, инъективные и биективные функции. Сложная и обратная функция.
Голос с задней парты:
— Я передумал. Заберите меня в армию…

bash.org.ru

2.1 Общие свойства функций

Определение 10. **Функцией** $F : A \mapsto B$ называется некоторый закон, который ставит в соответствие некоторым элемента множества A один или несколько элементов множества B. Множество A называется **множеством отправления** функции F, B называется **множеством прибытия**.

Пример 5. *График дежурства по классу является примером функции. Каждому дню ставится в соответствие один или несколько дежурных. Некоторым дням (выходным) ставится в соответствие ноль дежурных.*

Пример 6. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x}$ *является примером функции. Каждому действительному числу x (кроме $x = 0$) ставится в соответствие действительное число.*

Пример 7. $f(n) = n \mod 3 = \begin{cases} 0, & n = 3k; \\ 1, & n = 3k+1; \\ 2, & n = 3k+2; \end{cases}$ *является примером функции. Каждому целому числу ставится в соответствие остаток от деления на 3.*

Замечание. Можно дать следующее строгое определение понятия функции используя только множества: Функцией называют произвольное множество $\mathcal{F} \subset A \times B$. Тогда, если $x \in A$, то множество значений функции на x есть $F(x) = \{y \in B \,|\, (x, y) \in \mathcal{F}\}$.

Определение 11. Однозначной функцией $F : A \mapsto B$ называется некоторый закон, ставящий в соответствие каждому элементу множества A не более одного элемента множества B. Более формально, однозначной функцией называют множество $\mathcal{F} \subset A \times B$, такое, что если $(x', y'), (x'', y'') \in \mathcal{F}$ и $y' = y''$, то $x' = x''$.

Замечание. В данном курсе рассматриваются только однозначные функции, хотя многозначные — не есть какая-то экзотика. Например, функция, ставящая в соответствие квадратному уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ его корни $X(a, b, c) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ принимает ноль, одно или два значения в зависимости от знака $D = b^2 - 4ac$. Поэтому везде в дальнейшем будем писать просто «функция», понимая под этим однозначную функцию.

Определение 12. Областью определения функции F (обозначается D_F) называется множество $D_F \subset A$, состоящее из всех x, для которых $F(x)$ определена. **Множеством значений** функции F (обозначается E_F) называется множество $E_F = \{F(x) : x \in D_F$.

Определение 13. Образом множества M при отображении F называется множество $F(M) = \{y = F(x) : x \in M\}$. **Прообразом** множества S при отображении F называется множество $F^{-1}(S) = \{x : F(x) \in S\}$.

Замечание. Если множество S состоит из одной точки, то фигурные скобки обычно опускают и пишут $F^{-1}(y)$ вместо $F^{-1}(\{y\})$.

Определение 14. Инъекцией называют функцию F, такую, что для любых $x', x'' \in D_F$ из $x' \neq x''$ следует $F(x') \neq F(x'')$. Другими словами, инъекция — функция, которая на разных аргументах принимает разные значения.

Определение 15. Сюръекцией называют функцию $F : A \to B$, такую, что для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $F(x) = y$. Другими словами, сюръекция — функция, которая принимает каждое значение из B.

Замечание. Инъекцию иногда называют «отображение в», а сюръекцию «отображение на».

Определение 16. **Биекцией** (или **взаимно однозначным отображением**) называют функцию $F : A \to B$, являющуюся инъекцией и сюръекцией одновременно.

Определение 17. Пусть функции $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow X$ таковы, что $D_f = X$, $D_g = Y$, причём для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполнены равенства $x = g(f(x))$ и $y = f(g(y))$. Тогда функция g называется **обратной** для f и обозначается f^{-1}.

Теорема 2. *Пусть $F : A \to B$ биекция, $D_F = A$. Тогда существует обратная $F^{-1} : B \to A$, которая тоже является биекцией.*

Доказательство.
Рассмотрим произвольное $y^* \in B$. Поскольку F — сюръекция, то существует $x \in A$, такое, что $F(x) = y^*$. Таких $x \in A$ не может быть два, т.к. F — инъекция. Тогда отображение F^{-1}, которое ставит в соответствие каждому y^* такое x^* будет обратным к F.

Докажем, что F^{-1} — биекция. Пусть $x_0 \in A$, тогда рассмотрим $y_0 = F(x_0)$, очевидно, что $F^{-1}(y_0) = x_0$, следовательно, F^{-1} — сюръекция. С другой стороны, если $F^{-1}(y_1) = F^{-1}(y_2) = x^*$, то $y_1 = F(x^*)$ и $y_2 = f(x^*)$, следовательно, F^{-1} — инъекция.

Замечание. Если G — обратная функция для F, то F — обратная для G.

Пример 8. *Функция $F : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ заданная как $F(1) = 4$, $F(2) = 2$, $F(3) = 1$, $F(4) = 3$ является биекцией. Обратная к ней $F^{-1} : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ определена как $F^{-1}(1) = 3$, $F^{-1}(2) = 2$, $F^{-1}(3) = 4$ и $F^{-1}(4) = 1$.*

Пример 9. *Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x + 1$ является биекцией. Обратная функция $F^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.*

Пример 10. *Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$ не является биекцией. Действительно, $F(x) = F(-x)$, следовательно F — не инъекция. Кроме того, $E_F = [0; +\infty) \neq \mathbb{R}$, следовательно F не является сюръекцией.*

Пример 11. *Функция $F : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $F(x) = x^2$ является биекцией. Обратная функция $F^{-1}(y) = \sqrt{y}$.*

Определение 18. Пусть даны функции $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$. **Композицией** функций f и g (обозначается $g \circ f$) называется функция $h = g \circ f : X \to Z$, определенная на множестве $D_h = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ следующим образом: $h(x) = g(f(x))$.

2.2 Числовые функции

Определение 19. **Числовой функцией** называют функции $f(x)$, область определения и область значений которой являются подмножествами числовой прямой, т.е. $D_f, E_f \subset \mathbb{R}$. Другими словами, область отправления и прибытия числовой функции есть $\mathbb{R}$.

Замечание. Большая часть этого курса посвящена числовым функциям. Поэтому в дальнейшем под словом функция будем (если специально не оговорено) понимать числовая функция.

Определение 20. Числовая функция называется **четной**, если для всех $x \in D_f$ выполнено $(-x) \in D_f$ и $f(-x) = f(x)$. Числовая функция называется **нечетной**, если для всех $x \in D_f$ выполнено $(-x) \in D_f$ и $f(-x) = -f(x)$. Функции, которые не являются ни четными ни нечетными называют «функции общего вида».

Пример 12. *Функция* $f(x) = x^2 - 4x^4 + |x|$ *— четная,* $g(x) = x^3 - 3x|x|$ *— нечетная, а* $x^2 + x + 1$ *— общего вида.*

Определение 21. Функция $f(x)$ называется **периодической** если существует $T > 0$, такое, что:
1) $\forall x \in D_f (x \pm T \in D_f)$;
2) $\forall x \in D_f \left(f(x+T) = f(x)\right)$.
Число T называют **периодом** функции $f(x)$. Если $T_{\min}$ — период и для любого периода T выполнено $T_{\min} \leq T$, то $T_{\min}$ называют **наименьшим (или главным) периодом** $f(x)$.

Пример 13. $\sin x$, $\cos x$ *имеют наимешьний период, равный* 2π, *а* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — π. *Функция* $\{x\}$ *(дробная часть) имеет период, равный 1.*

2.3 График функции. Преобразования графиков.

Определение 22. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости $\Gamma_f = \{(x, y = f(x)) \,|\, x \in D_f\}$.

Пусть задана некоторая $y = f(x)$.

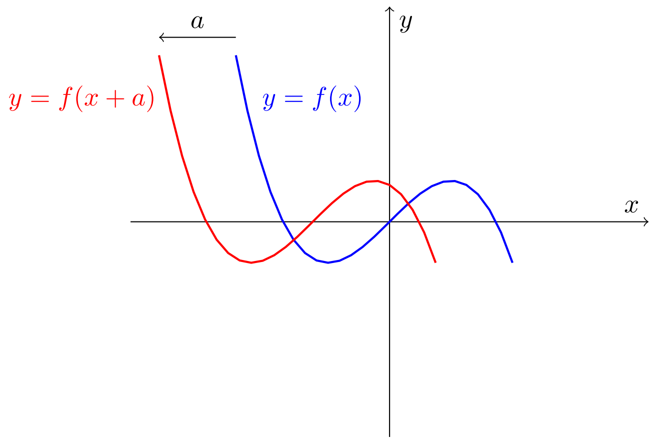
1. График функции $y = f(x+a)$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом на a **влево** (вправо, если $a < 0$) — см. рис. 1.

2. График функции $y = f(x)+a$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом на a вверх (вниз, если $a < 0$) — см. рис. 2.

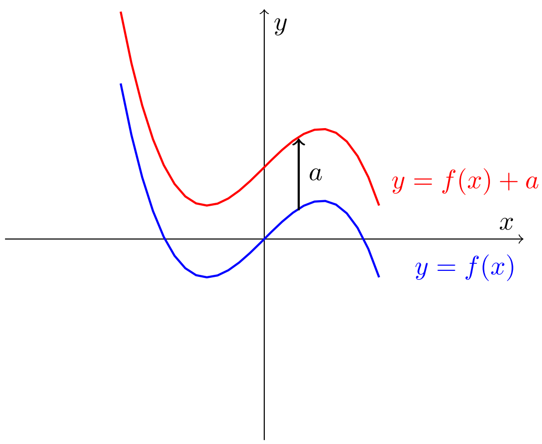
3. График функции $y = -f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox.

4. График функции $y = f(-x)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy.

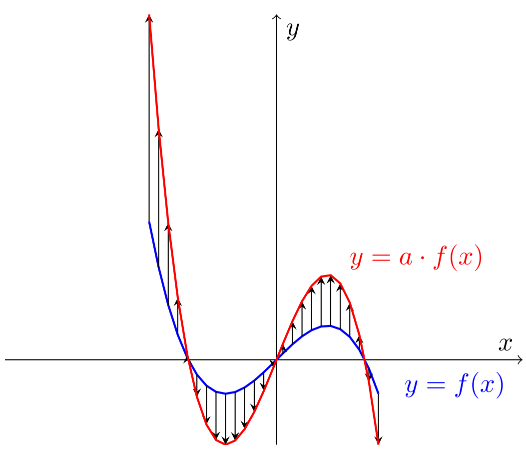
5. График функции $y = a \cdot f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением в a раз по направлению оси Oy (сжатием, если $a < 1$) — см. рис. 5.



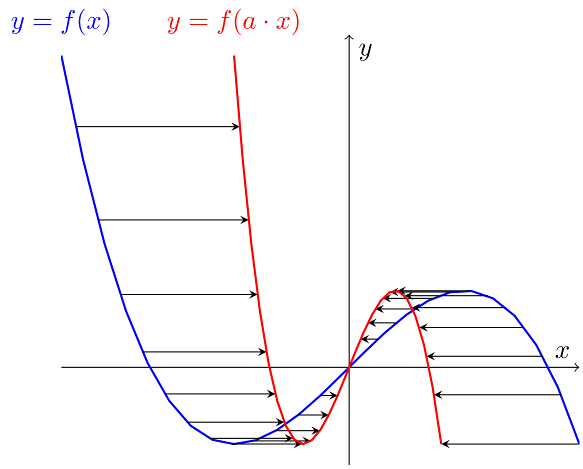
a
y
y = f(x + a)
y = f(x)
x

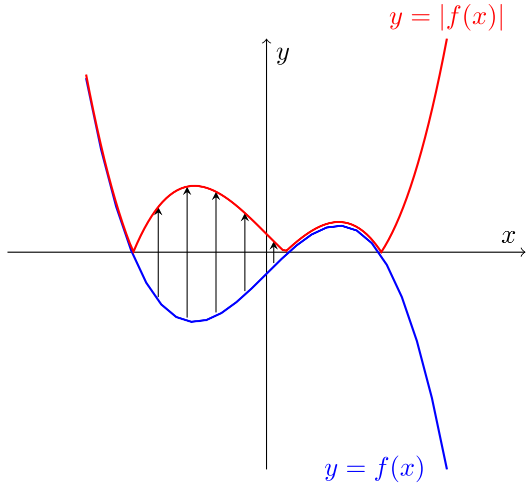


y
a
y = f(x) + a
x
y = f(x)



y
y = a · f(x)
x
y = f(x)



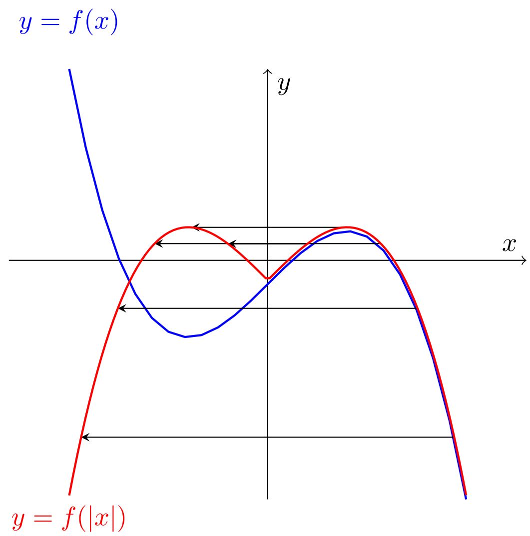


6. График функции $y = f(a \cdot x)$ получается из графика $y = f(x)$ **сжатием** в a раз по направлению оси Ox (растяжением, если $a < 1$) — см. рис. 6.

7. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox той части графика, которая расположена ниже этой оси — см. рис. 7.

8. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy той части графика, которая расположена правее этой оси, причем ту часть, что расположена левее оси следует отбросить — см. рис. 8.

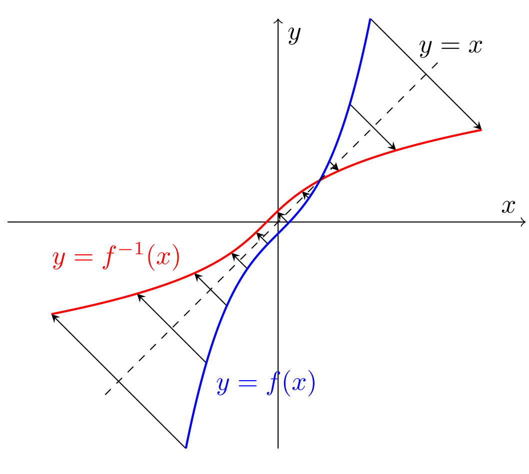
9. График функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика $y = f(x)$ отраже-



нием относительно прямой $y = x$ — см. рис. 9.

Теорема 3. *Пусть X и Y числовые множества и отображение $f : X \longrightarrow \longrightarrow Y$ имеет обратное. Тогда графики обратных отображений f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$. Функция f нечётная тогда и только тогда, когда f^{-1} нечётная, f строго возрастает тогда и только тогда, когда f^{-1} строго возрастает, f строго убывает тогда и только тогда, когда f^{-1} строго убывает.*

Доказательство.
Точка $A(x_0, y_0) \in \Gamma_f$ тогда и только тогда, когда $B(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$ согласно определению обратного отображения. Точка $C(\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{y_0+c_0}{2})$ — середина отрезка $[AB]$. Пусть $(\cdot)$ $O(0;0)$ – начало координат. Очевидно $C \in \Gamma_{y=x}$,



$|OA| = |OB| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Тогда если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $[OC]$ есть медиана и высота в равнобедренном треугольнике AOB. Значит, точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$. Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то они либо совпадают, либо все различны, и тогда из $y_0 = kx_0$, $x_0 = ky_0$, $x_0 \neq y_0$ следует, что $k = -1$. Так как прямые $y = x$ и $y = -x$ перпендикулярны, то и в этом случае точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$.

Далее, если f нечётная функция, то $(x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff (-x_0, -y_0) \in \Gamma_f$. Тогда имеем: $(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff (-x_0, -y_0) \in \Gamma_f \iff$ $\iff (-y_0, -x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$, то есть, $(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (-y_0, -x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Таким образом, f^{-1} нечётная функция. Значит, f нечётная функция $\iff$ f^{-1} нечётная функция.

Если f строго возрастает, то $x_1 < x_2 \iff y_1 < y_2$. Так как $(y_0, x_0) \in$ $\in \Gamma_{f^{-1}} \iff (x_0, y_0) \in \Gamma_f$, то и f^{-1} строго возрастает. Значит, f строго возрастает $\iff f^{-1}$ строго возрастает. Аналогично исследуется случай строгого убывания.

2.4 Примеры элементарных функций

.

- Функция $f(x) = C$, которая равна всюду некоторому фиксированному числу называется постоянной или константной функцией. Часто это факт записывают в форме $f \equiv const$. Графиком этой функции будет горизонтальная прямая.

- Линейная функция $y = kx + b$. Ее графиком является наклонная (т.е. не вертикальная) прямая, причем b — точка, в которой график пересекает ось Oy, а k — тангенс угла наклона (т.е. угла между прямой и осью Ox.

- Квадратичная функция (квадратный трехчлен) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

- Степенная функция $f(x) = x^n$. При четных степенях график имеет форму похожую на параболу, при нечетных — на кубическую параболу.

- Многочлен n-ой степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_0, ..., a_n$ — фиксированные числа ($a_n \neq 0$), которые называют коэффициентами многочлена P_n.

- Обратная функция $f(x) = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — фиксированное число. Ее графиком является гипербола.

- Квадратный корень $f(x) = \sqrt{x}$ — функция, определенная при $x \geqslant 0$. По определению квадратный корень из x (арифметический) есть неотрицательное число, квадрат которого равен x, т.е. $(\sqrt{x})^2 = x$. Графиком этой функции является половина параболы, отраженная относительно прямой $y = x$. Аналогично определяются корни четной степени $f(x) = \sqrt[2n]{x}$. Их графики похожи на график $y = \sqrt{x}$

- Кубический корень $f(x) = \sqrt[3]{x}$ — функция, определенная на всей числовой оси. По определению кубический корень (алгебраический) есть число, куб которого равен x. Графиком является кубическая парабола, отраженная относительно прямой $y = x$. Аналогично определяются корни других нечетных степеней $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$. Их графики похожи на график $y = \sqrt[3]{x}$

Упражнения

Упражнение 33. Перечислить все отображения $\{1, 3\} \to \{4, 5\}$, которые являются а) биекцией; б) инъекцией; в) сюръекцией.

Упражнение 34. Всегда ли выполнено a) $f^{-1}\big(f(D_f)\big) = D_f$? b) $f\big(f^{-1}(E_f)\big) = E_f$?

Упражнение 35. a) Пусть $f(A) \subset f(B)$ $(A, B \subset D_f)$. Следует ли из этого, что $A \subset B$? b) Пусть $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ $(A, B \subset E_f)$. Следует ли из этого, что $A \subset B$?

Упражнение 36. a) Пусть $\forall A \subset D_f$ выполнено $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Что можно сказать про функцию f? b) Пусть $\forall B \subset E_f$ выполнено $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$. Что можно сказать про функцию f?

Упражнение 37. Доказать что для произвольной функции f выполнено
a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
c) Можно ли в пункте «b» заменить знак «$\subset$» на «$=$»?

Упражнение 38. a) Доказать что для произвольной функции f выполнено включение $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$. b) Можно ли заменить знак «$\subset$» на «$=$»?

Упражнение 39. Пусть $A \subseteq D_f$ и $B \subseteq E_f$. Доказать, что $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.

Упражнение 40. Пусть множество A конечно. a) Пусть известно, что $f : A \to A$ — инъекция. Доказать что f — биекция. b) Пусть известно, что $f : A \to A$ — сюръекция. Доказать что f — биекция.

Упражнение 41. a) Докажите, что композиция функций удовлетворяет закону ассоциативности, т.е. $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$.
b) Привести пример $F : [0; 1] \to [0; 1]$ и $G : [0; 1] \to [0; 1]$, для которых не выполнен закон коммутативности, т.е. $F \circ G \neq G \circ F$.

Упражнение 42. Решить функциональные уравнения: a) $f(x)+f(1-x)=$ $=x^2$; b) $2f(x)+f(1/x)=2x$; c) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$; d) $2f(3-x)+3f(x-$ $-1)=2x-1$. e)* $2f(x)-f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=\frac{1}{x-2}$. f)** $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$.

Упражнение 43. Найдите все многочлены степени n, удовлетворяющие тождеству $P_n(x^2)\equiv(P_n(x))^2$.

Упражнение 44. (мех-мат, 2001) Числовая функция при всех $x\in\mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $x+f(x)=f(f(x))$. a) Докажите, что f — инъекция. b) Решите уравнение $f(f(x))=0$.

Упражнение 45. (ПВГ, 2005) Существуют ли функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом $x\in\mathbb{R}$ удовлетворяющие равенствам $f(g(x))=x^2$ и $g(f(x))=x^3$.

Упражнение 46. Числовая функция удовлетворяет соотношению $f(x+$ $+y)=f(x)+f(y)+80xy$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$. Найдите $f(\frac{4}{5})$, если $f(\frac{1}{4})=2$.

Упражнение 47. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству

$$f(x+y)+f(x+z)+f(x+t)+f(y+z)+\\ +f(y+t)+f(z+t)\geqslant 6f(x-3y+5z+7t)$$

при всех $x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

Упражнение 48. Задана функция f, такая, что $f(x+y)=f(x)+f(y)$ при всех $x,y\in\mathbb{R}$. Известно, что $f(9)=-3$. a) Найдите $f(-3)$. b*) Докажите, что существует бесконечно много таких функций (т.е. таких, что $f(x+y)=$ $=f(x)+f(y)$ и $f(9)=-3$).

Упражнение 49. Построить график функции: a) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1;\\ |x|, & x\leqslant 1\end{cases}$; b) $f(x)=x+|x|$; c) $f(x)=\big||x+2|-3\big|+4$; d) $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}$; e) $f(x)=\frac{x^3+8}{x+2}$; f) $f(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}$; g) $f(x)=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^4}-\sqrt[3]{x^6}$; h) $f(x)=[\sqrt[3]{x}]$; i) $f(x)=[|x|-|x-1|]$; j*) $f(x)=\left\{\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$.

Упражнение 50. Построить на координатной плоскости множество точек (x,y), удовлетворяющих условиям: a) $|y|=|x|$; b) $|y|>x+1$; c) $|x+y|\leqslant 1$; d) $|x|+|y|\leqslant 1$; e) $|y|-y=|x|-x$;

Упражнение 51. Найдите обратные функции к заданным и постройте их графики: a) $y=-(x+2)^2+3$, $x\in(-2;+\infty)$; b) $y=\sqrt{x^2-1}$, $x\in[1;+\infty)$; c) $y=\frac{x+2}{1-x}$, $x\in(1;+\infty)$; d) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in(-\infty;0]$; e) $y=x|x|+2x$, $x\in\mathbb{R}$.

Упражнение 52. Докажите, что график функции $f(x)=|k_1x+b_1|+|k_2x+$ $+b_2|+\ldots+|k_nx+b_n|$ (где k_i,b_i — фиксированные числа) является ломаной.

Упражнение 53. Как по графику функции определить, что она является а) инъекцией? б) биекцией? в) четной? г) периодической?

Упражнение 54. Приведите пример функции, определенной на всей прямой, а) которая принимает положительные значения на $(-3;-2)$ и отрицательные значения на промежутках $(-\infty;-3)$ и $(-2;+\infty)$. b) ...которая принимает положительные значения на интервалах $(-3;-2)$ и $(0;1)$ и отрицательные значения на промежутках $(-\infty;-3)$; $(-2;0)$ и $(1;+\infty)$.

Упражнение 55. Задана функция f, периодическая с периодом $T = 6$. При $x \in [-2;4]$ она задается формулой $f(x) = |x-2|-3$. a) Найдите значение выражения $4f(11) - 2f(-15)$. b) Постройте график $y = f(x)$.

Упражнение 56. Задана функция f, четная и периодическая с периодом $T = 6$. При $x \in [0;3]$ она задается формулой $f(x) = x^2-2x-2$. a) Постройте график $y = f(x)$. b) Найдите количество нулей функции на отрезке $[-5;4]$.

Упражнение 57. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом $T = 8$. На отрезке $[0;4]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 4x$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-2;5]$.

Упражнение 58. Функция $f(x)$ периодическая с периодом, равным 2. На промежутке $[0;2)$ эта функция совпадает с функцией $= x^2 - 2$. Сколько раз пересекаются графики функций $= f(x)$ и $= 1$ на отрезке $[1;7]$?

Упражнение 59. Периодическая функция $= f(x)$ с периодом $T = 3$ определена для всех действительных чисел. На отрезке $[1;7]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 3 корня. Найдите произведение этих корней.

Упражнение 60. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 8{,}5 + (f(x-9{,}5)/x - 9{,}5)$ вычислите сумму $g(9) + g(10)$.

Упражнение 61. Докажите, что любая функция, определенная на всей числовой прямой представима в виде суммы четной и нечетной функции.

Упражнение 62. Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, определенные на всей числовой прямой. Что можно сказать про функции: a) $f(x)+$ $+\,g(x)$; b) $f(x) - g(x)$; c) $f(x)g(x)$; d) $f(x)/g(x)$; e) $f(g(x))$; f) $f^2(x) + g^2(x)$?

Упражнение 63. Известно, что $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная функция, определенные на всей числовой прямой. Определить тип функции: a) $|f(x)|$; b) $|g(x)|$; c) $f(-x) + g(|x|)$; d) $g(-x)$; e) $xf(x) + x^2g(x)$; f) $g(x|x|)$?

Упражнение 64. Является ли ограниченной сверху/снизу функция на указанном множестве: a) x^2+3x+5, $x \in [1;3]$; b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$; c) $\frac{|x+1|}{x^3+1}$, $x \in \mathbb{R}$; d) $x^4 - 2x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$; e) $|x| - |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}$, $x \in (2,+\infty)$; g) $\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Упражнение 65. Приведите пример функции $f(x)$, ограниченной на множестве M и $g(x)$ — неограниченной на этом множестве, таких, что: a) $f(x)g(x)$ ограничена на M; b) $f(x)g(x)$ не ограничена на M; c) $f(x)/g(x)$ ограничена на M; d) $f(x)/g(x)$ не ограничена на M;

Упражнение 66. a) Доказать, что $F(x) = x\sqrt{x^4+1}$ является инъекцией. b) Решить уравнение $2x\sqrt{16x^4+1} + (3-x)\sqrt{(x-3)^4+1} = 0$.

Упражнение 67. Найдите промежутки возрастания/убывания функции: a) $x^2 - 8x + 11$; b) $\frac{1}{1+x^2}$; c) $x^4 - x^2$; d) $\big||x-1|-2\big|$;

Глава 3

Метод математической индукции.

Определение 23. Методом математической индукции называется способ доказательства утверждений, состоящий в следующем: пусть есть некоторое утверждение $\mathcal{U}(n)$, зависящее от $n \in \mathbb{N}$ и надо доказать это утверждение для всех $n \in \mathbb{N}$. Доказательство состоит из двух этапов:

1. **База индукции.** Докажем утверждение $\mathcal{U}(1)$.
2. **Шаг индукции.** Докажем, что из утверждений $\mathcal{U}(1), \mathcal{U}(2), \ldots, \mathcal{U}(n-1)$ следует утверждение $\mathcal{U}(n)$.

Доказательство (корректности метода математической индукции). Предположим обратное, пусть $\mathcal{U}(n)$ верно не при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется наименьшее n_0, при котором утверждение неверно. Номер n_0 не может равняться 1, это следует из базы индукции. Следовательно, утверждения $\mathcal{U}(1), \mathcal{U}(2), \ldots, \mathcal{U}(n_0 - 1)$ верны, а из них и вытекает $\mathcal{U}(n_0)$. □

Далее приводятся примеры использования метода математической индукции.

3.1 «Ханойские башни»

Рассмотрим использование принципа математической индукции на примере игры «Ханойские башни». Это старинная игра, которая заключается в следующем: На подставке укреплены три стержня. На левый стержень нанизано несколько колец разного размера, внизу самое большое кольцо, на нем поменьше, сверху еще меньше и т. п. Правила игры таковы:

1. За один ход можно переносить только одно кольцо.
2. Любое кольцо можно укладывать либо на большее кольцо, либо на свободный стержень, т.е. запрещено укладывать большее кольцо на меньшее.

Каково наименьшее число ходов необходимо для того, чтобы перенести все кольца с левого стержня на правый (при этом средний стержень используется как вспомогательный)?

Поиграв немного с различным числом колец, можно заметить, что с одним кольцом головоломка решается за 1 ход, с двумя — за 3 хода, с тремя — за 7, с четырьмя — за 15 и.т.д. Логично предположить, что число ходов для n колец на единицу меньше n–й степени двойки. Но как это проверить для всех значений n? Их же бесконечно много! На помощь приходит метод математической индукции:

Утверждение 1. *Головоломку с n кольцами можно решить за $2^n - 1$ ходов и нельзя — за меньшее число ходов.*

Доказательство.
Будем доказывать индукцией по n:
База индукции. База индукции очевидна, головоломка с 1 кольцом решается за 1 ход — просто перекладываем кольцо с первого стержня на третий.
Шаг индукции. Сделаем шаг индукции. Пусть для $n-1$ кольца задача решается за $2^{n-1}-1$ ходов. Тогда,очевидно, можно переложить кольца с 1–го по $n-1$–е за столько же ходов на второй стержень; затем переложить n–е кольцо на третий стержень, а потом, опять за $2^{n-1}-1$ ходов переложить кольца с 1–го по $n-1$–е со второго стержня на третий. Всего получается $(2^{n-1}-1)+1+(2^{n-1}-1) = 2^n - 1$ ходов.

За меньшее число ходов головоломку решить нельзя, поскольку, как бы мы не перекладывали кольца, надо в какой-то момент переложить n-е кольцо с первого стержня на третий, а это возможно, только в случае, когда все остальные кольца лежат на втором стержне.

3.2 Неравенство Бернулли

Теорема 4 (Неравенство Бернулли)**.** *Пусть $x > -1$ и $x \neq 0$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда $(1+x)^n > 1 + nx$.*

Доказательство.
Докажем индукцией по n.
База индукции. Очевидно $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$.
Шаг индукции. Пусть $n \geqslant 1$. По предположению индукции

$$(1+x)^{n-1} > 1 + (n-1)x.$$

Умножим обе части этого неравенства на $1 + x > 0$. Тогда

$$(1+x)^n > (1+(n-1)x)\,(1+x) = 1 + nx + (n-1)x^2 > 1 + nx.$$

Следствие 1. *При любых $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\alpha^{n+1} + n \cdot \beta^{n+1} > (n+1) \cdot \alpha\beta^n.$$

Доказательство.
Обозначим $\frac{\alpha}{\beta} = 1 + x$, тогда по неравенству Бернулли

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} > 1 + (n+1)x = (n+1)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - n.$$

Умножим обе части на β^{n+1}, получим

$$\alpha^{n+1} > (n+1) \cdot \alpha\beta^n - n \cdot \beta^{n+1}.$$

Перенося $n \cdot \beta^{n+1}$ влево, получим требуемое неравенство.

3.3 Формула включений–исключений.

Докажем формулу включений–исключений (теорема 1): **Доказательство.**

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Доказательство будем вести индукцией по n.
База индукции. При $n = 2$ представим $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup \cup (A_2 \setminus A_1)$, причем три множества, стоящие в правой части не пересекаются. Поэтому

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \setminus A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \setminus A_1| = \\ = |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

что и доказывает утверждение при $n = 2$.
Шаг индукции. Предположим, что утверждение доказано для $n-1$, обозначим $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ и $B' = B \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)$. Тогда, применяя предположение индукции к A_n и B, получим

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |B \cup A_n| = |B| + |A_n| - |B'|. \tag{3.3.1}$$

Заметим, что для B и B' тоже можно применить утверждение теоремы, т.к. каждое из них содержит объединение $n-1$ множества. Получаем, что

$$|B| = \sum_{1 \le i \le n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \le i < j < k \le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

$$|B'| = \sum_{1\le i\le n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1\le i<j\le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| +$$
$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| - \ldots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A - n|$$

Подставив полученные выражения в 3.3.1 и заметив, что члены содержащие нечетное число множеств идут со знаком «+», а четное — со знаком «—», получаем требуемое равенство.

3.4 Треугольник Паскаля.

Рассмотрим треугольник, составленный из чисел по следующим правилам:

- В первом ряду одно число — 1.
- В каждом следующем ряду чисел на одно больше, чем в предыдущем.
- В каждом ряду крайние числа равны 1.
- Начиная с третьего ряда каждое число равно сумме двух своих соседей: сверху–слева и сверху–справа.

Эту конструкцию называют треугольником Паскаля (см. рис. 3.4).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots & & & & \ldots & & & & \ldots
\end{array}$$

Рис. 3.1: Треугольник Паскаля.

Утверждение 2. *Число, стоящее в $n+1$ ряду на $k+1$ месте можно найти по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где числа C_n^k — число сочетаний из n элементов по k широко используются в комбинаторике.*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
$$

Рис. 3.2: Биномиальные коэффициенты.

Доказательство.
Проведем индукцию по номеру ряда.

База индукции. Для $n = 1$ получим $C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1$.

Шаг индукции. Пусть предположение индукции верно для n ряда. Докажем его для $n+1$–го Для крайних элементов получим: $C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Для остальных по предположению индукции сумма соседей сверху равна

$$
C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =
$$
$$
= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.
$$

Замечание. Попутно было доказано тождество $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$. Оно нам позднее понадобится

3.5 Бином Ньютона.

— Вы когда умрете?
Тут уж буфетчик возмутился.
— Это никому не известно и
никого не касается,
— ответил он.
— Ну да, неизвестно,
— послышался все тот же
дрянной голос из кабинета,
— подумаешь, бином Ньютона!
Умрет он через девять месяцев,
в феврале будущего года, от
рака печени в клинике Первого
МГУ, в четвертой палате.

М.А.Булгаков,
Мастер и Маргарита.

Бином[1] — выражение, составленное из двух одночленов. Формула Ньютона позволяет возводить двучлен в любую натуральную степень.

Теорема 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n$$

.

Доказательство.
Будем вести доказательство индукцией по n.
База индукции. При $n = 1$ равенство $(1+x)^1 = 1 + x = C_1^0 + C_1^1 \cdot x$ очевидно, выполнено.
Шаг индукции. Пусть формула верна для $n - 1$. Умножим обе части тождества

$$(1+x)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 \cdot x + \ldots + C_{n-1}^{n-1} \cdot x^{n-1}$$

на $(1+x)$. Получим

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^0 \cdot x + C_{n-1}^1 \cdot x + C_{n-1}^1 \cdot x^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_{n-1}^{n-1} \cdot x^n = \\ &= C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) \cdot x + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) \cdot x^2 + \ldots + (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) \cdot x^{n-1} + C_{n-1}^{n-1} \cdot x^n = \\ &= C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать Замена C_{n-1}^0 на C_n^0 и C_{n-1}^{n-1} на C_n^n законна, так как все эти числа равны 1.

[1]binom — двучлен, лат.

3.6 Неравенство Коши.

Принцип обратной индукции. Неравенство Коши.

Определение 24. Средним арифметическим чисел a_1, ..., a_n называют величину $\bar{a} = \frac{a_1+...+a_n}{n}$.

Определение 25. Средним геометрическим чисел $b_1 \geqslant 0$, ..., $b_n \geqslant 0$ называют величину $\tilde{b} = \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}$.

Теорема 6 (Неравенство Коши)**.** *Пусть* $a_1, \ldots a_n \geqslant 0$. *Тогда*

1. $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+...+a_n}{n}$, *т.е. среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического.*

2. *Равенство в пункте 1 достигается тогда и только тогда, когда* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказательство.
Для доказательства этой теоремы понадобится следующий

Принцип обратной индукции.[2] Если утверждение $\mathcal{P}(n)$ доказано для некоторой бесконечной возрастающей последовательности $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ и доказано, что $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n-1)$, то утверждение $\mathcal{P}(n)$ доказано для всех $n \in \mathbb{N}$.

Справедливость принципа вытекает из того, что для любого n найдется n_k, такое, что $n_k \geqslant n$ и что $\mathcal{P}(n_k) \Rightarrow \mathcal{P}(n_k - 1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathcal{P}(n)$.

Докажем теперь теперь неравенство Коши.

Выберем $n_k = 2^k$ и докажем, что для таких n неравенство выполнено. Доказывать будем индукцией по k.

База индукции. $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $a_1 = a_2$. Раскроем скобки $a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geqslant 0$, следовательно, $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$.

Шаг индукции. Пусть доказано для 2^k, докажем для 2^{k+1}. По предположению индукции

$$\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} \quad \text{и} \quad \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}} \leqslant \frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}.$$

Применим к $\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}}$ и $\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}$ неравенство для $n = 2$, получим

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}} = \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdot \ldots \cdot a_{2^{k+1}}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}},$$

[2] Иногда еще называют индукцией Коши

что и требовалось доказать. Осталось заметить, что равенство выполнено только при условии, что все числа равны между собой.

Итак, неравенство Коши доказано для $n = 2^k$. Воспользуемся принципом обратной индукции.

Предположим, что указанное неравенство верно для n и докажем для $n-1$.

Пусть даны a_1,..., a_{n-1}. В качетсве a_n выберем среднее арифметическое этих чисел $a_n = \frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$ и применим к полученным числам неравенство для n, получим

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(a_1+\ldots+a_{n-1}+\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right) = \\ = \frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} = a_n.$$

Поделим обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_n}$:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}} \leqslant \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_n}} = a_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

Возведем обе части неравенства в степень $\frac{n}{n-1}$, получим

$$\sqrt[n-1]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}} \leqslant a_n = \frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1},$$

что и требовалось доказать.

3.6.1 Суммы степеней.

В разделе ??? была доказана формула $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Возникает вопрос — возможно ли выписать аналогичные формулы для сумм кубов, четвертых степеней и т.д.? Оказывается, это можно сделать. Обозначим $S_k(n) = 1^k+2^k+\ldots+n^k$. Очевидно, $S_0(n) = n$, $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Для того, чтобы найти суммы более высоких порядков, воспользуемся следующим приемом, который называется «телескопическое суммирование»[3]. Суть метода в том, что для последовательности $b_i = a_{i+1} - a_i$ легко вычислить сумму $S_n = b_1+b_2+\ldots+b_n = (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_{n+1}-a_n) = a_{n+1} - a_1$.

Итак, рассмотрим в качестве b_n следующую последовательность: $b_i = (i+1)^{k+1} - i^{k+1} = C_{k+1}^1 i^k + C_{k+1}^2 i^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k i + C_{k+1}k + 1$ — правая часть получена по формуле бинома Ньютона.

[3] Учащиеся СУНЦ знакомы с этим приемом по Летней школе

Запишем эти члены для i от 1 до n:

$$\begin{aligned}
2^{k+1} - 1^{k+1} &= C_{k+1}^1 \cdot 1^k + C_{k+1}^2 \cdot 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1};\\
3^{k+1} - 2^{k+1} &= C_{k+1}^1 \cdot 2^k + C_{k+1}^2 \cdot 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1};\\
&\ldots\ldots\\
n^{k+1} - (n-1)^{k+1} &= C_{k+1}^1 \cdot (n-1)^k + C_{k+1}^2 \cdot (n-1)^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1};\\
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= C_{k+1}^1 \cdot n^k + C_{k+1}^2 \cdot n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1};
\end{aligned}$$

Сложив эти равенства, после приведения подобных членов получим:

$$(n+1)^{k+1} - 1 = C_{k+1}^1 \cdot S_k(n) + C_{k+1}^2 \cdot S_{k-1}(n) + \ldots + C_{k+1}^{k+1} \cdot S_0(n).$$

Выразим отсюда $S_k(n)$, получим рекуррентную формулу:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - C_{k+1}^2 \cdot S_{k-1}(n) - \ldots C_{k+1}^{k+1} \cdot S_0(n) - 1\right).$$

Таким образом для любого натурального k можно получить формулу для суммы k-х степеней (хотя для больших k это может быть долго и утомительно).

Несложно доказать следующее утверждение:

Утверждение 3. *При любом натуральном k сумма $S_k(n)$ выражается многочленом степени $k+1$ со старшим коэффициентом, равным $\frac{1}{k+1}$.*

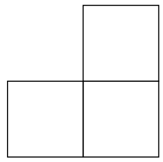
Доказательство.
Предоставляется читателю в качестве упражнения.

Упражнения

Упражнение 68. Последовательность $\{a_n\}$ задана правилом: $a_1 = 1$, а каждый член, начиная со второго, вычисляется по формуле $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Докажите, что $a_n = 2^n - 1$.

Упражнение 69. Докажите, что любую сумму, начиная с 8 рублей, можно выплатить монетами по 3 рубля и 5 рублей.

Упражнение 70. По легенде, где-то в джунглях есть древний храм, в котором монахи решают головоломку «Ханойские башни» с 64 кольцами. А когда они ее решат — наступит конец света. Определить, сколько осталось до конца света, если на 1 ход они тратят одну секунду, а перекладывать кольца начали 1 января 1 года н.э.

Упражнение 71. а) Доказать, что квадраты 4×4, 8×8, $16 \times 16, \ldots$ с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на такие «уголки» из трёх клеток;  b) Доказать, что квадрат размера 4×4, 8×8, $16 \times$ $\times\, 16$,... с **произвольной** вырезанной клеткой можно разрезать на такие же «уголки».

Упражнение 72. На сколько изменятся суммы $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ и $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$, если увеличить n на 1? Доказать, что эти суммы равны друг другу при всех n.

Упражнение 73. Известно, что число $x+1/x$ — целое. Доказать, что числа x^2+1/x^2, x^3+1/x^3, $x^4+1/x^4, \ldots, x^n+1/x^n$ также целые.

Упражнение 74. Доказать тождества: a) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$; b) $1+3+$ $+5+\ldots+(2n-1)=n^2$; c) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; d) 1^2+3^2+ $+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$; e) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$; f) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$; g) $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+$ $+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$; h) $\frac{x}{1-x^2}+$ $+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$.

Упражнение 75. Доказать, что а) $\underbrace{111\ldots111}_{27\text{ единиц}}$ делится на 27. б) $\underbrace{111\ldots111}_{81\text{ единица}}$ делится на 81. в) при любом натуральном n $\underbrace{111\ldots111}_{3^n\text{ единиц}}$ делится на 3^n.

Упражнение 76. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке? (Прямые "общего положения").

Упражнение 77. На плоскости расположено несколько прямых и окружностей. Докажите, что части, на которые они разбивают плоскость, можно покрасить в два цвета так, что любые две части, имеющие общий участок границы, покрашены в разные цвета.

Упражнение 78. Последовательность Фибоначчи $\{u_n\}$ задается соотношениями: $u_1=u_2=1$; $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$. Доказать следующие соотношения: a) $u_{2n+2}=u_1+u_3+\ldots+u_{2n+1}$; b) $u_{2n+1}=1+u_2+u_4+\ldots+u_{2n}$; c) $u_nu_{n+1}=u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2$; d) $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$; e) u_n^2- $-u_{n+1}u_{n-1}=(-1)^{n+1}$; f) $u_n^4-u_{n-2}u_{n-1}u_{n+1}u_{n+2}=1$.

Упражнение 79. Доказать, что любая сторона а) четырёхугольника; б) пятиугольника; в) произвольного n–угольника меньше суммы остальных его сторон.

Упражнение 80. Доказать, что а) $n! \geqslant 3^n$ для $n=7,8,9,\ldots$; б) $2^n \geqslant n^2$ для $n=4,5,6,\ldots$

Упражнение 81. Доказать, что двузначные числа от 00 до 99 можно записать в таком порядке, что в каждом следующем отличается от предыдущего только одна цифра и ровно на 1. Доказать аналогичное утверждение для трёхзначных чисел $(000, \ldots, 999)$, четырёхзначных и.т.д.

Упражнение 82. Последовательность $2, 3, 5, 9, \ldots$ составлена по такому правилу: если из утроенного члена этой последовательности вычесть удвоенный предыдущий, то получится следующий ($3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$, $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$ и.т.д.). Доказать, что все члены этой последовательности — степени двойки, увеличенные на 1.

Упражнение 83. В стране n городов. Каждый год открывается авиасообщение между какими-то двумя городами. Доказать, что должно пройти по крайней мере $n - 1$ лет, прежде чем из любого города можно будет попасть в любой (с пересадками).

Упражнение 84. На доске написаны два числа $1, 1$. Затем между ними вписывают их сумму; получается $1, 2, 1$. Затем между каждыми двумя снова вписывают их сумму: $1, 3, 2, 3, 1$. Такое действие выполняют n раз. Сколько чисел будет на доске? Какова будет их сумма?

Упражнение 85. Из чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n-1, 2n$ можно выбрать не более n чисел, если требуется, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось на другое. Доказать это а) для $n = 3$; б) для $n = 4$; в) для $n = 5$; г) для произвольного n.

Упражнение 86. * В теории относительности скорости складываются по такому правилу: $v, w \mapsto \frac{v+w}{1+vw}$. Доказать, что результат сложения нескольких скоростей не зависит от того, в каком порядке мы их складываем.

Упражнение 87. * Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

Упражнение 88. * Один выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Доказать, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего.

Упражнение 89. Докажите утверждение 3.

Упражнение 90. Вывести формулу Ньютона для $(a + b)^n$.

Упражнение 91. Найти сумму $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Упражнение 92. Найти сумму $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n$.

Упражнение 93. Найдите ошибку в рассуждении (www.habrahabr.ru):
Легко доказать (например по-индукции), что $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Применим эту формулу для* $n - 1$, *получим* $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$. *Прибавим по единице к обеим частям:* $1+2+3+\ldots+(n-1)+1 = \frac{(n-1)n}{2}+1$. *Упрощая, получаем:* $1+2+3+\ldots+n = \frac{(n-1)n}{2}+1$. *Чему*

равна сумма в левой части этого равенства мы записали в самом начале, следовательно, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$. Раскрываем скобки: $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$. Упрощаем, и получаем, что $n = 1$. Так как n было произвольным, то мы доказали, что все натуральные числа равны 1.

3.6.2 Неравенство Бернулли

Упражнение 94. Каждый год 1% радиоактивного вещества (оставшегося к началу года) распадается. a) Доказать, что через 30 лет останется более 70% вещества. b*) Доказать, что через 30 лет останется менее 80% вещества.

Упражнение 95. Указать (какое-либо) натуральное n, при котором: a) $0{,}99^n \leqslant 1/10$; b) $\sqrt[n]{10} \leqslant 1{,}01$; c) $\sqrt[n]{0{,}1} \geqslant 0{,}99$.

Упражнение 96. Доказать, что при целом неотрицательном n и при $0 \leqslant h \leq 1$ выполнено неравенство $(1-h)^n \geqslant 1 - nh$.

Упражнение 97. Доказать, что $1{,}01^{2n} \geqslant n^2/10^4$.

Упражнение 98. Доказать, что при некотором целом $n > 0$ число $1{,}01^n$ будет больше числа $1000n$.

Упражнение 99. При каких натуральных n выполнено неравенство a) $2^n > n$? b) $2^n > n^2$?

Упражнение 100. Доказать, что $2^n \geqslant n^{10}$ при $n \geqslant 100$.

Упражнение 101. Доказать, что $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n > 2$.

Упражнение 102. Доказать, что при целом неотрицательном n и при $0 \leqslant h \leq 1$ выполнено неравенство $(1-h)^n \leqslant 1 - nh + n^2h^2$.

Упражнение 103. Известно, что $a_1, \ldots, a_n > 0$ и что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{10}$. Доказать, что a) $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant \frac{9}{10}$; b) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant \frac{11}{10}$; c) $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leqslant \frac{10}{9}$.

Упражнение 104. Известно, что $a_1, a_2, \ldots, a_{100} > 0$ и что $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{100}) \leqslant 100$. Доказать, что найдётся такое i, что $a_i \leqslant \frac{1}{i}$.

Упражнение 105. Доказать, что $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot100} < \frac{1}{10}$.

Упражнение 106. Все числа бесконечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ положительны и не превосходят 100. Доказать, что найдётся такое k, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1{,}001$.

Упражнение 107. Доказать, что при некотором целом $n > 0$ выполнено неравенство $\frac{n^{100}}{2^n} < 10^{-3}$.

Глава 4

Числовые множества

В математике используются следующие обозначения для числовых множеств:

- $\mathbb{N}$ — Множество натуральных чисел. Это числа, используемые при счете: 1,2,3, ..., 2013, и.т.д.
- $\mathbb{Z}$ — Множество целых чисел. Это натуральные числа, взятые со знаком «+» или «−» , а также 0: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm 2013$, и.т.д.
- $\mathbb{Q}$ — Множество рациональных чисел. Это числа, получающиеся при делении целого числа на натуральное, т.е. дроби. Более формально, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- $\mathbb{R}$ — Множество действительных чисел. Можно понимать действительные числа как точки на числовой прямой или бесконечные десятичные дроби. Строгое определение этого понятия будет дано в конце семестра.

Замечание. Выполнено включение: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. В повседневной жизни мы, обычно, используем только рациональные числа. Возникает вопрос, нужны ли действительные числа, да и вообще, существуют ли числа, не являющиеся иррациональными? На этот вопрос отвечает следующее утверждение:

Утверждение 4. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство.
Доказательство будем проводить методом «от противного». предположим, что $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{2}$ представим в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, так как из произвольной дроби всегда можно получить несократимую, сократив на наибольший общий делитель числителя и знаменателя. Тогда $2 = \frac{m^2}{n^2}$, следовательно $2n^2 = m^2$, а значит m кратно двум. Обозначим $m = 2m_1$. Тогда $n^2 = 2m_1^2$, следовательно n тоже кратно двум, что и приводит к противоречию с несократимостью дроби $\frac{m}{n}$.

Замечание. Аналогично доказывается, что $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, …и, вообще, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, если n не является точным квадратом (квадратом целого числа).

Напомним, что декартовым произведенеим множеств A и B называется множество пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Если множества A и B совпадают, то используется обозначение $A^2 = \{(a_1, a_2) : a_{1,2} \in A\}$.

В частности, для множества всех пар действительных чисел используется обозначение $\mathbb{R}^2$. Наглядным представлением $\mathbb{R}^2$ служит декартова координатная плоскость, на которой каждой точке ставится в соответствие пара действительных чисел — ее координаты. Аналогично можно определить $\mathbb{R}^3$ — множество троек (x, y, z), $x, y, z \in \mathbb{R}$ и поставить им в соответствие точки трехмерного пространства.

В дальнейшем в этом разделе будут рассматриваются различные подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$ и их свойства. Соответственно $\mathbb{R}$ является объемлющим множеством и под дополнением A в данном разделе (если специально не оговорено) понимается $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$.

4.1 Аксиомы действительных чисел.

Французского школьника, мальчика лет восьми, спросили, сколько будет $2 + 3$. Он был отличник по математике, но считать не умел, потому что там так учат математике. Он не знал, что это будет пять, но он ответил, как отличник, так, чтобы ему поставили пятерку: «$2 + 3$ будет $3 + 2$, потому что сложение коммутативно.»

акад. В.И.Арнольд, доклад на конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков»

Напомним утверждения, выполненые для всех действительных чисел, которые принимаются без доказательства, т.е. *аксиомы.*

1. **Коммутативность сложения.**
   Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $a + b = b + a$.

2. **Ассоциативность сложения**
   Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. **Существование нуля (элемента, нейтрального относительно сложения).**

Существует $0 \in \mathbb{R}$, такое, что для любого $a \in \mathbb{R}$ выполнено $a+0=0+a=a$.

4. **Существование противоположного числа (обратного относительно сложения).**
   Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует $-a \in \mathbb{R}$, такое, что $a+(-a)=(-a)+a=0$.

5. **Коммутативность умножения**
   Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $a \cdot b = b \cdot a$.

6. **Ассоциативность умножения.**
   Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

7. **Существование единицы (элемента нейтрального относительно умножения).**
   Существует число $1 \in \mathbb{R}$, такое, что для любого $a \in \mathbb{R}$ выполнено $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

8. **Существование обратного числа (относительно умножения).**
   Для любого числа $a \neq 0$ существует число $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

9. **Дистрибутивность умножения относительно сложения**
   Для любых трёх действительных чисел a, b и c верно равенство $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

10. **Симметричность сравнения**
    Для любого a выполнено $a \leqslant a$;

11. **Транзитивность сравнения** Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$;

12. **Сравнимость чисел** Для любых a, b выполнено по крайней мере одно из нераыенств $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, причем оба неравенства выполнены только если $a = b$;

13. **Монотоннность операции умножения)** Если $a \leqslant b$ и $0 \leqslant c$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot c$;

14. **Аксиома Архимеда**
    Для любых $a, b > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $na \geqslant b$;

15. **Аксиома отделимости**
    Пусть множества A, B таковы, что $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$. Тогда существует число c такое, что $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leq c \leq b$.

Аксиоматический метод позволяет использовать числа как некоторые «сущности», с которыми можно работать по определенным правилам (аксиомам и вытекающим из них, например $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$). Позднее будут предложены другие методы задания чисел.

4.1.1 Окрестности.

Определение 26. Окрестностью точки a называется интервал $U(a) = (b, c)$, где $b < a < c$.

Несложно понять смысл слова «окрестность» — это точки расположенные близко к точке a. Хотелось бы обратить внимание на то, что окрестность всегда задается открытым интервалом (т.е. не включающим концы) — позднее мы увидим, почему отрезок окрестностью считать не принято.

Определение 27. Проколотой окрестностью точки a называется множество $\overset{\circ}{U}(a) = (b, a) \cup (a, c)$, где $b < a < c$.

Определение 28. ε-окрестностью точки a называется интервал $u_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Определение 29. Проколотой ε–окрестностью точки a называется множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Замечание. Часто окрестности задаются в форме неравенств: $|x - a| < \varepsilon$ для ε–окрестности, $0 < |x - a| < \varepsilon$ для проколотой ε–окрестности.

Утверждение 5. *Пересечение двух окрестностей некоторой точки (проколотых окрестностей) является окрестностью (проколотой окрестностью) этой точки.*

Утверждение 6. *Объединение двух окрестностей некоторой точки (проколотых окрестностей) является окрестностью (проколотой окрестностью)*

Утверждение 7. *Пересечение двух (проколотых) ε–окрестностей некоторой точки является (проколотой) ε–окрестностью*

Утверждение 8. *Объединение двух ε–окрестностей (проколотых ε–окрестностей) некоторой точки является окрестностью (проколотой ε–окрестностью)*

Докажем последнее утверждение:

$$U_{\varepsilon'}(a) \cup U_{\varepsilon''}(a) = (a - \varepsilon', a + \varepsilon') \cup (a - \varepsilon'', a + \varepsilon'') = \\ = (a - \max(\varepsilon', \varepsilon''), a + \max(\varepsilon', \varepsilon'') = U_{\max(\varepsilon', \varepsilon'')}(a).$$

□

Доказательство остальных утверждений предоставляется читателю в качестве упражнения.

Определение 30. Множество A называется **открытым**, если для каждой точки $a \in A$ найдется $\varepsilon > 0$ (для каждой точки, возможно, свой ε) такое, что $U_\varepsilon(a) \subset A$.

Это определение объясняет, почему про множества (a, b) говорят «открытый интервал». Например, множества $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, $\mathbb{R}$ являются открытыми, а $\mathbb{N}$, $[-1, 1]$, $(-\infty, 0]$ — не являются.

Упражнение 108. Пусть A и B — открытые множества. Докажите, что a) $A \cup B$; b) $A \cap B$ — открытые.

Определение 31. Множество A называется **замкнутым**, если его дополнение $\bar{A}$ — открытое.

Например, замкнуты множества $[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $(-\infty, 0]$.

Упражнение 109. Докажите замкнутость указанных множеств.

4.2 Точная верхняя и нижняя грань множества.

Определение 32. Пусть множество A таково, что все его элементы не превосходят некоторого числа μ, т.е. $\forall a \in A\, (a \leqslant \mu)$. Тогда говорят, что множество A ограничено сверху, а μ — его верхняя граница (верхняя грань) и обозначают так: $A \leq \mu$ или $\mu \geq A$.

Определение 33. Пусть множество A таково, что все его элементы не меньше некоторого числа m, т.е. $\forall a \in A$ выполнено неравенство $a \geqslant m$. Тогда говорят, что множество A ограничено снизу, а m — его нижняя граница (нижняя грань) и обозначают так: $A \geq m$ или $m \leq A$.

Например, если множество $A = [0, 1]$, то числа 1, 10 или 2013 являются его верхними гранями, а $\frac{2}{3}$, 0, $-1, 23$ — нет.

Определение 34. Если множество A ограничено как сверху, так и снизу, то говорят, что A — ограниченное множество.

Заметим, что если некоторое число M является верхней гранью множества A, то любое $M' > M$ тоже будет верхней гранью этого множества. Таким образом, если множество ограничено сверху (снизу), то оно имеет бесконечно много верхних (соответственно, нижних) граней. Так, например для множества $(0, 1) \cup (99, 100)$ верхней гранью будет любое число, не меньшее 100. Хотелось бы выбирать каким-то образом одну из этих граней. Например, для множества $(0, 1) \cup (99, 100)$ представляется естественным выбрать именно 100 (а не 101 или 100.001) в качестве верхней грани. Приведенные ниже определения дают ответ на этот вопрос.

4.2.1 Точная верхняя грань

Определение 35. Пусть число a является верхней гранью множества A, а никакое меньшее его — не является. Более формально $A \leq a$ и $(\forall a' < a) A \not\leq a'$. Тогда говорят, что a есть **точная верхняя грань** множества A и обозначают так: $a = \sup A$.

Определение 36. Пусть число a является нижней гранью множества A, а никакое большее его — не является. Более формально, пусть $A \geq a$ и $(\forall a' > > a) A \ngeq a'$. Тогда говорят, что a есть **точная нижняя грань** множества A и обозначают так: $a = \inf A$.

Пример 14. *Рассмотрим множество $A = (0, 1)$. В этом множестве нет наибольшего элемента. В некотором смысле число 1 хотелось бы назвать максимумом, но оно не принадлежит данному множеству! Аналогично, хотелось бы считать 0 минимумом этого множества.*

Покажем, что $\sup A = 1$. Действительно, все числа на интервале $(0, 1)$ не превосходят 1. С другой стороны, если взять число $a < 1$, то оно уже не будет верхней гранью, поскольку $a < a' = \frac{a+1}{2} \in (0, 1)$.

Пример 15. *Рассмотрим множество $\mathcal{A} = \{\frac{m}{n} \mid m^2 < 2n^2, m, n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что все элементы этого множества меньше,чем $\sqrt{2}$, но для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $m/n \in \mathcal{A}$ так, что $m/n > \sqrt{2} - \varepsilon$. Например, можно взять представление $\sqrt{2}$ в виде десятичной дроби до k-го знака после запятой (с округлением в меньшую сторону). При этом k выбирается так, чтобы было выполнено неравенство $10^{-k} < \varepsilon$. Следовательно $\sup \mathcal{A} = \sqrt{2}$.*

Свойства точной верхней(нижней) грани

Точная верхняя(нижняя) грань обладает следующими свойствами (везде предполагаем, что $a_0 = \sup A$):

1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $a \in A$, такое, что $|a - a_0| < \varepsilon$, т.е. $a \in U_\varepsilon(a_0)$.

2. Если же в дополнение к предыдущему пункту $a_0 \notin A$, то для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(a_0)$ содержит бесконечно много элементов множества A.

3. Будем обозначать $r \cdot A = \{r \cdot a \mid a \in A\}$. Пусть $r > 0$, тогда $\sup(r \cdot A) = = ra_0$.

4. Будем обозначать $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Тогда $\sup(A + B) = = \sup A + \sup B$.

5. Будем обозначать $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Тогда $\inf(-A) = -\sup A$.

Доказательство.

1. Предположим, что в $U_\varepsilon(a_0)$ нет элементов A, тогда все элементы не превосходят $a_0 - \varepsilon$, т.к. не могут быть больше a_0. Следовательно $a_0 - - \varepsilon$ — верхняя грань. Противоречие.

2. Предположим, что в $U_\varepsilon(a_0)$ содержится только конечное число элементов $a_1, \ldots, a_n \in A \cup U_\varepsilon(a_0)$. Выберем наибольший из них —
$$a' = \max(a_1, \ldots, a_n) < a_0$$

и пусть $\varepsilon' = a_0 - a$. Тогда $U_{\varepsilon'}(a_0)$ не содержит элементов A, что противоречит предыдущему пункту.

3. Если $a \in A$, то $a \leq a_0$, умножим обе части на r, получим $ra \leq ra_0$, следовательно, ra_0 является верхней грань rA. Докажем, что она точная. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $a \in A$, такое, что $a > a_0 - \frac{eps}{r}$. Тогда $ra > ra_0 - \varepsilon$, следовательно, $ra_0 - \varepsilon$ не является верхней гранью rA.

4. Если $a \in A$, $b \in B$, то $a \leq a_0$, $b \leq b_0$, следовательно, $a_0 + b_0$ является верхней гранью $A+B$. Докажем, что она точная. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $a > a_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $b > b_0 - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $a+b > a_0+b_0-\varepsilon$, следовательно, $a_0 + b_0 - \varepsilon$ не является верхней гранью.

5. Пусть $a \in A$, тогда $a \leq a_0$, следовательно, $-a \geq -a_0$, т.е. $-a_0$ — нижняя грань. Докажем, что она точная. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $a > a_0 - \varepsilon$. Тогда $-a < -a_0 + \varepsilon$, т.е. $-a_0 + \varepsilon$ не является нижней гранью.

Упражнение 110. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для точной нижней грани.

Определение 37. Пусть множества A и B таковы, что при всех $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Тогда это обозначают так: $A \leq B$.

4.2.2 Аксиома отделимости.

В качестве дополнительной (к приведенным в разделе 4.1 аксиомам) в определении множества действительных чисел выступает следующая аксиома:
Аксиома отделимости. Пусть даны два непустых множества $A, B \subset \mathbb{R}$, такие, что $A \leq B$. Тогда найдется такое число c, что $A \leq c \leq B$.

Аксиома отделимости говорит о весьма важном свойстве множества действительных чисел — непрерывности, то есть о том, что в нем нет «дырок». Если посмотреть, например, на множество рациональных чисел, то можно увидеть, что для него эта аксиома неверна.

Возникает вопрос, у каких множеств вообще существует точная верхняя (или нижняя) грань. Очевидно, что у множеств, не ограниченных сверху (например $\mathbb{N}$) верхней грани (а значит и точной верхней грани) не существует. Следующая теорема дает ответ на этот вопрос для ограниченных множеств:

Теорема 7. *Если непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то существует $\sup A$ — его точная верхняя грань.*

Доказательство.
Рассмотрим B — множество всех верхних граней множества A. Оно не пусто, т.к. по условию $A \leq M$, следовательно $M \in B$. Из определения верхней грани $A \leq B$, тогда, по аксиоме отделимости, существует разделяющая

точка c, такая, что $A \leq c \leq B$. Докажем, что эта точка и есть $\sup A$. Действительно, поскольку $A \leq c$, то она есть верхняя грань множества A. Рассмотрим произвольную $a' < a$. Поскольку $a' < a \leq B$, то $a' \notin B$, а значит, a' не является верхней гранью A. □

Теорема 8. *Если непустое множество A ограничено снизу, то существует его точная нижняя грань,* $\inf A$.

Упражнение 111. Доказать теорему 8.

Упражнение 112. Пусть существует $\sup A$ и $A' \subset A$. Докажите, что существует $\sup A'$ и $\sup A' \leq \sup A$.

4.2.3 Дедекиндовы сечения*

Немецкий математик Юлиус Дедекинд (1831–1916) предложил использовать указанную конструкцию ($A \leq c \leq B$) в качестве строгого определения действительного числа. Заметим, что в школьной математике действительное число понимается скорее интуитивно, строгого определения обычно не приводится.[1]

Определение 38. Упорядоченнная пара непустых множеств $A \leqslant B$ называется сечением в $\mathbb{Q}$, а сами множества A и B — нижним и верхним классами данного сечения, если $\mathbb{Q} = A \cup B$. Сечение мы будем обозначать $A|B$.

Определение 39. Множество $\mathcal{L}$ называется непрерывным (по Дедекинду), если каково бы ни было его сечение, либо в нижнем классе сечения существует наибольший элемент, либо в верхнем классе существует наименьший элемент, (такие сечения называются дедекиндовыми).

Рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Легко видеть, что в нём не может быть «скачков»: если a — максимальный элемент нижнего класса, b минимальный элемент верхнего класса, то число $(a+b)/2$, лежащее посередине между a и b, не может принадлежать ни нижнему, ни верхнему классу, что противоречит определению сечения.

Вместе с тем, во множестве рациональных чисел есть «пробелы» — как раз на тех местах, где должны находиться иррациональные числа. Рассмотрим, например, сечение $A|B$, определяемое множествами

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2)\} \cup (-\infty, 0)$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\}$

Нетрудно видеть, что это действительно сечение, однако в нижнем классе нет максимального элемента, а в верхнем нет минимального. То есть имеем «пробел». Итак, множество $\mathbb{Q}$ не является непрерывным по Дедекинду.

Определение 40. Будем называть сечения $A|B$, для которых существует $\max(A)$ или $\min(B)$ рациональными, а все остальные сечения — иррациональными.

---

[1] Желающие узнать более подробно могут посмотреть: *http : //ru.wikipedia.org/wiki/*Конструктивные_способы_определения_вещественного_числа

Всякому рациональному сечению ставим в соответствие рациональное число $\max(A)$ или $\min(B)$. Для всякого иррационального сечения $A|B$ присоединяем к совокупности $\mathbb{Q}$ новый элемент (иррациональное число) α, который по определению больше всякого числа из A, и меньше всякого числа из B. Тем самым мы заполняем «пустое место» между классами сечения. Мы будем говорить, что сечение $A|B$ определяет иррациональное число α.

Определение 41. Иррациональным числом называется иррациональное сечение $\alpha = (A|B)$. Множество всех таких чисел (сечений) обозначается $\bar{\mathbb{Q}}$.

Определение 42. Множеством действительных чисел $\mathbb{R}_d$ называется объединение множеств рациональных и иррациональных чисел $\mathbb{R}_d = \mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}$. Всякий элемент множества $\mathbb{R}_d$ называется действительным числом.

Введем отношение порядка на $\mathbb{R}_d$. Будем говорить , что сечение $A|B$ не превосходит $A'|B'$ и обозначать это $A|B \leq A'|B'$, если $A \leq B'$. Будем говорить, что сечения $(A|B)$ и $(A'|B')$ равны и обозначать $A|B = A'B'$, если $(A|B) \leq (A'|B')$ и $(A'|B') \leq (A|B)$. В противном случае будем говорить, что сечения не равны: $A|B \neq A'|B'$.

Замечание Равные сечения не обязательно задаются одинаковыми множествами, так, например, $\{x \leqslant 2\}|\{x > 2\} = \{x < 2\}|\{x \geqslant 2\}$

Операции сложения и умножения вводятся на множестве действительных чисел по непрерывности (точно также как и в теории бесконечных десятичных дробей). Именно, суммой двух действительных чисел $\alpha = (A_1|A_2)$ и $\beta = (B_1|B_2)$ называется действительное число $\gamma = (A_1 + B_1|A_2 + B_2)$.

Умножение сначала определяется для положительных чисел как $\alpha \times \beta = = (\{x \leqslant 0\} \cup \{ab : a \in A_+, b \in B_+\}$, а потом переносится на отрицательные числа по обычным правилам, и т.д.

Дедекинд показал, что таким образом можно построить арифметику действительных чисел чисто формально, не прибегая к геометрическим аналогиям.

Заметим, что при таком задании $\mathbb{R}_d$ аксиома непрерывности становится теоремой:

Теорема 9 (Дедекинд)**.** *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}_d$, т.е. некоторые множества сечений и $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. Тогда существует сечение $(C_1|C_2) \in \mathbb{R}_d$, такое, что $\mathcal{A} \leq (C_1|C_2) \leq \mathcal{B}$.*

Другие аксиомы (коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, ...) вытекают из соответствующих свойств рациональных чисел.

Упражнения

Упражнение 113. Нарисовать на числовой оси те числа x, для которых $[x] = [x + 2/3]$.

Упражнение 114. Обозначая дни недели от воскресенья до субботы числами 0, $1, 2, \ldots, 6$, Вася придумал формулу

$$\textit{день недели} = 7 \cdot \{\textit{число}/7\},$$

которая годится, если первое число месяца было понедельником. Как надо её изменить, если первое число месяца было пятницей?

Упражнение 115. Всегда ли верны формулы $[[x+y]+z] = [x+[y+z]]$ и $\{\{x+y\}+z\} = \{x+\{y+z\}\}$?

Упражнение 116. Доказать, что (при всех x) $[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\ldots+$ $+[x+\frac{n-1}{n}] = [nx]$.

Упражнение 117. Существует ли такое x, что $[x]+[2x]+[3x]+[4x] = 99$?

Упражнение 118. Найти сумму $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{10000}]$.

Упражнение 119. Доказать, что $[\frac{35}{23}]+[2\cdot\frac{35}{23}]+[3\cdot\frac{35}{23}]+\ldots+[22\cdot\frac{35}{23}] =$ $= [\frac{23}{35}]+[2\cdot\frac{23}{35}]+[3\cdot\frac{23}{35}]+\ldots+[34\cdot\frac{23}{35}]$.

Упражнение 120. Нарисовать графики функций: а)$[x]$ б)$\{x\}$ в)$[x]-\{x\}$ г) $[x]+\{2x\}$.

Упражнение 121. Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$. Доказать формулу: $a_k =$ $= \left[10^{-k}A - 10[10^{-k-1}A]\right]$

Упражнение 122. а) Привести пример $A > 0$ такого , что $\{A\}+\{1/A\} = 1$. б) Может ли такое A быть рациональным числом?

Упражнение 123. а) Доказать, что для любых рациональных a и b ($a < b$) найдется иррациональное c, принадлежащее отрезку $[a, b]$. b) Доказать, что для любых рациональных a и b ($a < b$) найдется бесконечное множество $C \subset (a, b)$, такое, что $C \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Упражнение 124. а) Доказать, что для любых иррациональных a и b ($a < b$) найдется рациональное c, принадлежащее отрезку $[a, b]$. b) Доказать, что для любых иррациональных a и b ($a < b$) найдется бесконечное множество $C \subset (a, b)$, такое, что $C \subset \mathbb{Q}$.

Упражнение 125. Пусть число задается десятичной дробью а)$\alpha = 0,101001000100001000001\ldots$; б)$\alpha = 0,123456789101112131415\ldots.$; Будет ли это число рациональным?

Упражнение 126. Докажите, что при $x \neq \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) $\sin x$ и $\cos x$ рациональны тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 127. Может ли а) сумма двух рациональных чисел быть иррациональной? б) сумма двух иррациональных чисел быть рациональной? в) иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

Упражнение 128. Докажите, что а) $\sqrt[3]{17} \notin \mathbb{Q}$; b)$\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; c)$\sqrt{2}+$ $+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; d)$\cos 20^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Упражнение 129. Докажите, что бесконечная десятичная дробь 0,1234567891011121314... (после запятой подряд выписаны все натуральные числа по порядку) представляет собой иррациональное число.

Упражнение 130. Дана бесконечная десятичная дробь $0, a_1 a_2 \ldots$. Докажите, что цифры в ее десятичной записи можно переставить так, чтобы полученная дробь выражала рациональное число.

Упражнение 131. Один из корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

Упражнение 132. Дана квадратная сетка на плоскости и треугольник с вершинами в узлах сетки. Докажите, что тангенс любого угла в треугольнике - число рациональное.

Упражнение 133. Докажите, что на окружности с центром в точке $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$лежит не более одной точки с целочисленными координатами.

Упражнение 134. Можно ли нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки?

Упражнение 135. Вычислить

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{100}\right).$$

Упражнение 136. Доказать, что уравнение $x^2 - 4y^2 = 4xy$ не имеет решений в целых числах кроме $x = y = 0$.

Упражнение 137. Сумма нескольких различных правильных дробей с числителем 1 может быть равна 1, например $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Есть ли другие такие примеры?

Упражнение 138. Доказать, что десятичная запись числа 2^{-n} содержит ровно n знаков после запятой.

Упражнение 139. Найти 2005 цифру после запятой в десятичной записи дроби : а)$\frac{1}{3}$ б)$\frac{1}{7}$ в)$\frac{1}{31}$.

Упражнение 140. Доказать, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}.$$

Подсказка: (Насколько левая и правая части меньше $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$*?)*

Упражнение 141. Доля двоечников в классе больше $\frac{2}{5}$, но меньше $\frac{3}{7}$, а всего в классе не больше 15 человек. Сколько в классе двоечников?

Упражнение 142. Известно, что $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$; числители и знаменатели этих дробей положительны. Доказать, что дробь $\frac{m+p}{n+q}$ находится между ними.

Упражнение 143. a)Доказать, что число $\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ не целое; b) Число α записали в виде несократимой дроби. Чётен ли её числитель? А знаменатель?

Упражнение 144. Найти все пары $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, такие, что $\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$ и **доказать**, что других — нет.

Упражнение 145. Цитата из рассказа В.Пелевина «Вести из Непала»:
На всем пространстве между циклопическими зданиями боксов и воротами, через которые Любочка пыталась пройти три минуты назад, не было видно никого, кроме высокого мужчины в красном фартуке, с большим широкоскулым лицом. Он держал в мускулистых розовых руках щит с надписью «КРЕПИ ДЕМОКРАТИЮ!» и шагал прямо на Любочку (...) Метрах в двадцати от бокса стояли двое (...) Один из них был толстым и низеньким, уже в летах, а другой — стриженным наголо молодым человеком. Держась за руки, они внимательно разглядывали плакат.
— Обрати внимание, — говорил низенький, причем над его ртом поднимался пар, — на сложность концепции. Как это загадочно уже само по себе — плакат, изображающий человека, несущего плакат! Если развить эту идею до полагающегося ей конца и поместить на щит в руках мужчины в красном комбинезоне плакат, на котором будет изображен он сам, несущий такой же плакат, — что мы получим? (...)
— Мы получим модель вселенной, понятное дело, — ответил молодой человек.
Допустим, как и предлагал низенький, что на каждом плакате изображен человек, несущий плакат и.т.д. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем этим плакатам. Единственна ли эта точка? Плакаты можно считать прямоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям.

4.3 Длина дуги окружности

4.3.1 Длина окружности.

Вспомним некоторые понятия из геометрии. Ломаной из n звеньев на плоскости называется $n+1$ различных точек $A_0,\ A_1, \ldots, A_n$ – вершин ломаной – и n отрезков, последовательно соединяющих эти точки. Ломаная без самопересечений называется простой (см. рис. 4.3.1). Точки A_0 и A_n называются концами ломаной. Если концы ломаной совпадают, ломаная называется замкнутой. Простая замкнутая ломаная называется многоугольником, звенья этой ломаной — сторонами многоугольника, вершины ломаной — вершинами многоугольника. Если эта ломаная имеет n звеньев, то ее называют n–угольник. Многоугольник называется выпуклым, если для всякой его стороны верно, что все остальные стороны лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей выбранную сторону. Длина ломаной суть сумма длин её звеньев, периметр многоугольника — сумма длин его сторон.

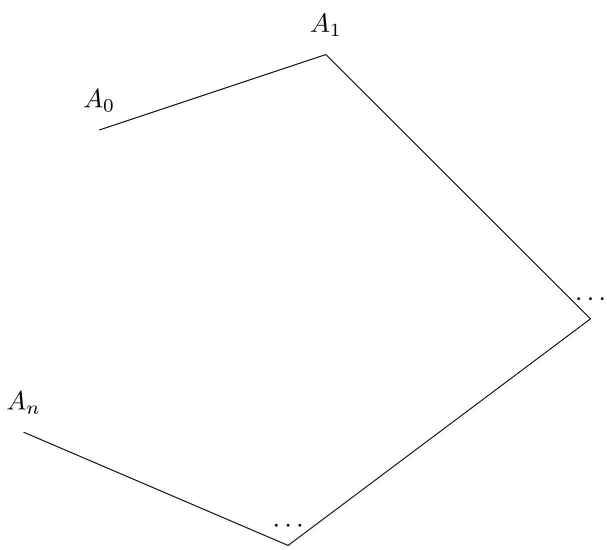


Рис. 4.1: Простая незамкнутая ломаная

Теорема 10. *Длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины ломаной.*

Доказательство проведём индукцией по числу звеньев ломаной.

- Для $n = 1$ утверждение, очевидно, верно.
- Шаг индукции: рассмотрим ломаную $A_0A_1 \dots A_nA_{n+1}$, состоящую из $(n+1)$-го звена. Обозначим l_n длину ломаной, $A_0A_1 \dots A_n$, состоящей из n звеньев. Тогда

$$|A_0A_{n+1}| \leq |A_0A_n| + |A_nA_{n+1}| \leq l_n + |A_nA_{n+1}| = l_{n+1}.$$

Первое неравенство суть неравенство треугольника, а второе справедливо по предположению индукции. □

Теорема 11. *(Без доказательства) Если выпуклый многоугольник Q_0 содержит выпуклый многоугольник R, то периметр R не превосходит периметра $Q_0 : P(R) \leq P(Q_0)$.*

Рассмотрим произвольную окружность. Пусть M — множество периметров вписанных в окружность выпуклых многоугольников. Множество M не пусто, так как в окружность можно вписать треугольник, периметр которого будет элементом M. По теореме 11 множество M ограничено сверху периметром описанного около окружности треугольника. По теореме 7 существует $L = \sup M$. Эту величину L и называют длиной окружности.

Определение 43. Длиной окружности называется точная верхняя грань множества периметров вписанных в окружность выпуклых многоугольников.

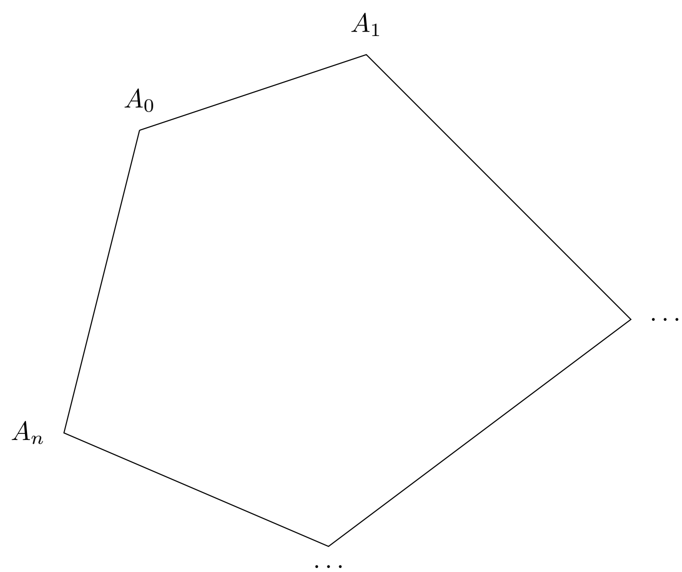


Рис. 4.2: Простая замкнутая ломаная

4.3.2 Число π.

Утверждение 9. *Отношение длины окружности к её диаметру одно и то же для любой окружности.*

Доказательство.
В самом деле, пусть D и D' - диаметры каких–либо окружностей с общим центром O. Гомотетия с центром O и коэффициентом $k = \frac{D'}{D}$ переводит окружность D в окружность D'. Так как гомотетия есть преобразование подобия, то $D' = kD$ и длина окружности $L' = kL$, ведь периметры всех вписанных выпуклых многоугольников при гомотетии изменятся в k раз, а значит, и верхняя грань периметров изменится во столько же раз (см. раздел 4.2.1). Таким образом $\frac{L}{D} = \frac{L'}{D'}$.

Определение 44. Число π есть отношение длины окружности к её диаметру: $\pi = \frac{L}{D}$.

4.3.3 Длина дуги

Рассмотрим часть окружности, отсекаемую от нее некоторой прямой. Эта часть называется дугой окружности, точки пересечения — концами дуги. Заметим, что дуга задается своими концами, вообще говоря, неоднозначно, т.к. существуют две дуги $\overset{\frown}{AB}$ с концами в точках A и B (см. рис.)

Определение 45. Говорят, что простая ломаная $A_1 \dots A_n$ вписана в дугу $\overset{\frown}{AB}$, если ее концы совпадают с концами дуги, а остальные вершины лежат на дуге $\overset{\frown}{AB}$ (см. рис. 4.3.3). Будем обозначать $\mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})$ — множество всех ломаных, вписанных в дугу $\overset{\frown}{AB}$, а $|\mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})|$ — множество их длин.

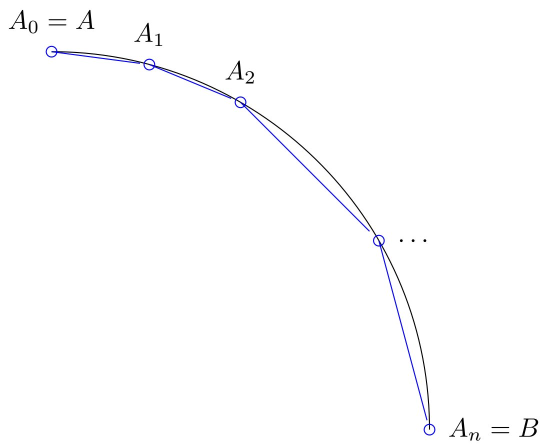


Рис. 4.3: Ломаная вписана в дугу.

Определение 46. Дуги называют **равными**, если у них равны радиусы и угловые меры.

Определение 47. Длиной дуги (обозначают $|\ \overset{\frown}{AB}\ |$ называют точную верхнюю грань длин вписанных в нее ломаных, т.е.

$$|\ \overset{\frown}{AB}\ | = \sup |\mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})|.$$

Указанная точная верхняя грань, очевидно, существует, поскольку длины ломанных не превосходят периметра многоугольника, описанного около окружности.

Утверждение 10. *Длины равных дуг равны.*

Доказательство.

Действительно, допустим даны дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$, у которых равны радиусы и угловые меры. Тогда любой ломаной $A_1A_2...A_n \in \mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})$, вписанной в $\overset{\frown}{AB}$ можно поставить в соответствие ломаную $A'_1A'_2...A'_n \in \mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})$, вписанную в $\overset{\frown}{A'B'}$, причем $|A_1...A_n| = |A'_1...A'_n|$. Следовательно, множества $|\mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})$ и $|\mathcal{V}(\overset{\frown}{A'B'})$ состоят из одних и тех же элементов, значит совпадают и их sup.

Теорема 12 (Аддитивность длины дуги)**.** *Пусть точка B расположена на дуге $\overset{\frown}{AC}$, тогда $|\ \overset{\frown}{AB}\ | + |\ \overset{\frown}{BC}\ | = |\ \overset{\frown}{AC}\ |$. Другими словами, длина дуги, составленной из двух других равна сумме длин этих дуг.*

Доказательство.
Введем обозначения: $L_1 = |\overset{\frown}{AB}|$, $L_2 = |\overset{\frown}{BC}|$ и $L = |\overset{\frown}{AC}|$.

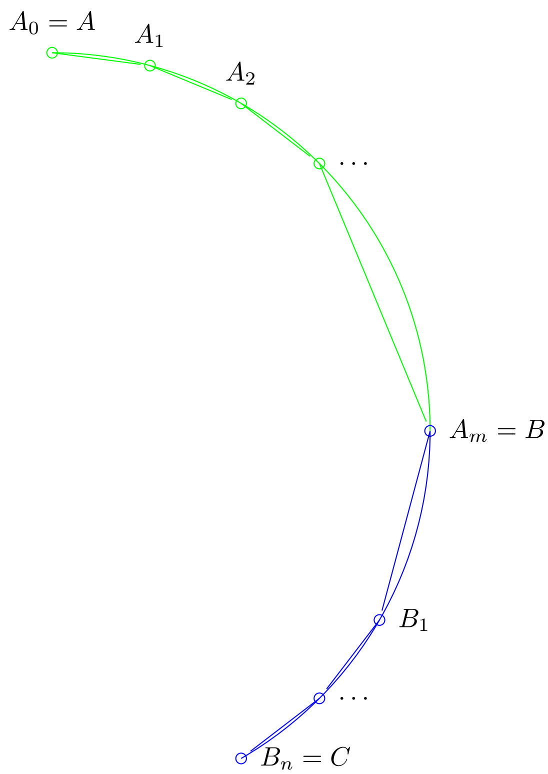


Рис. 4.4: Две ломаные с общим концом.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем ломаные $AA_1...A_{m-1}B$ и $BB_1...B_{n-1}C$ вписанные в дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства $|AA_1...A_{m-1}B| > L_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $|BB_1...B_{n-1}C| > L_2 - \frac{\varepsilon}{2}$. Существование таких ломаных вытекает из определения точной верхней грани. Заметим, что объединив ломаные $AA_1...A_{m-1}B$ и $BB_1...B_{n-1}C$, вписанные в дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$, соответственно, получим ломанную $AA_1...A_{m-1}BB_1...B_{n-1}C$ вписанную в дугу $\overset{\frown}{AC}$ (см. рис. 4.3.3). Поэтому

$$L = |\overset{\frown}{AC}| = \sup |\mathcal{V}(\overset{\frown}{AC})| \geq |AA_1...A_{m-1}BB_1...B_{n-1}C| > L_1 + L_2 - \varepsilon. \quad (4.3.1)$$

С другой стороны выберем ломаную $AA_1...A_mB_1...B_n$, вписанную в дугу $\overset{\frown}{AC}$ так, чтобы выполнялось неравенство $|AA_1...A_mB_1...B_n| > L - \varepsilon$. Если точка B не является вершиной ломаной, то добавим ее, при этом длина ломаной, очевидно, увеличится. $|AA_1...A_mBB_1...B_n| > |AA_1...A_mB_1...B_n| > L - \varepsilon$. Заметим, что ломаная $AA_1...A_mBB_1...B_n$ составлена из двух ломаных, $AA_1...A_mB \in \mathcal{V}(\overset{\frown}{AB})$ и $BB_1...B_n \in \mathcal{V}(\overset{\frown}{BC})$, следовательно,

$$L - \varepsilon < |AA_1...A_mBB_1...B_n| = |AA_1...A_mB| + |B_1...B_n| \leq L_1 + L_2. \quad (4.3.2)$$

Из неравенств 4.3.1 и 4.3.2 вытекает, что

$$L - \varepsilon < L_1 + L_2 < L + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное, то $L = L_1 + L_2$.

4.3.4 Радианная мера угла

Некоторые факты из геометрии

Напомним, что угол — геометрическая фигура на плоскости, состоящая из точки - вершины угла, и двух различных лучей, исходящих из этой точки — сторон угла.

Свойства углов[2]:

- Каждый угол имеет определённую градусную меру, бо́льшую нуля.
- Развёрнутый угол равен $180°$.
- Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, лежащим между сторонами угла. Луч лежит между сторонами угла, если он исходит из вершины угла и пересекает какой-либо отрезок с концами на сторонах угла.
- Угол разбивает плоскость на две части, каждая из которых называется плоским углом.
- Центральным углом называется плоский угол с вершиной в центре некоторой окружности.
- Углы с совпадающими сторонами имеют градусную меру $0°$.
- Плоские и центральные углы имеют меру от $0°$ до $360°$.

Упражнение 146. Луч исходит из вершины угла и пересекает какой-либо отрезок с концами на сторонах угла. Докажите, опираясь на *теорему Паша*[3], что в таком случае луч пересекает любой другой отрезок с концами на сторонах угла. Теорема Паша состоит в том, что если прямая пересекает одну из сторон треугольника и не проходит ни через одну из его вершин, то она пересекает одну из двух других сторон треугольника. Докажите также теорему Паша.

[2]Употребляя слово угол, будем иметь в виду либо просто угол, либо плоский угол, либо центральный угол.

[3]В аксиоматике Гильберта геометрии Евклида теорема Паша взята за аксиому.

Определение 48. Рассмотрим плоский угол, вершина которого совпадает с центром окружности радиуса $R = 1$. **Радианной мерой** угла называют длину дуги, высекаемой сторонами этого угла.

Утверждение 11. *Пусть плоский угол имеет меру α градусов. Тогда его радианная мера есть $\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$.*

Доказательство.
Доказано будет утверждение, когда $\alpha \in \mathbb{Q}$, для произвольного действительного α утверждение будет доказано позднее. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$, разобьем дугу в 180° на $180n$ равных частей. Из аддитивности длины дуги вытекает, что длина каждой из частей равна $\frac{\pi}{180n}$. Взяв m таких частей, получим дугу длины $\frac{m\pi}{180n} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$.

Таким образом, радианная мера есть линейная замена градусной меры. Исходя из определения 11 составим таблицу соответствия градусной и радианной меры для некоторых углов.

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

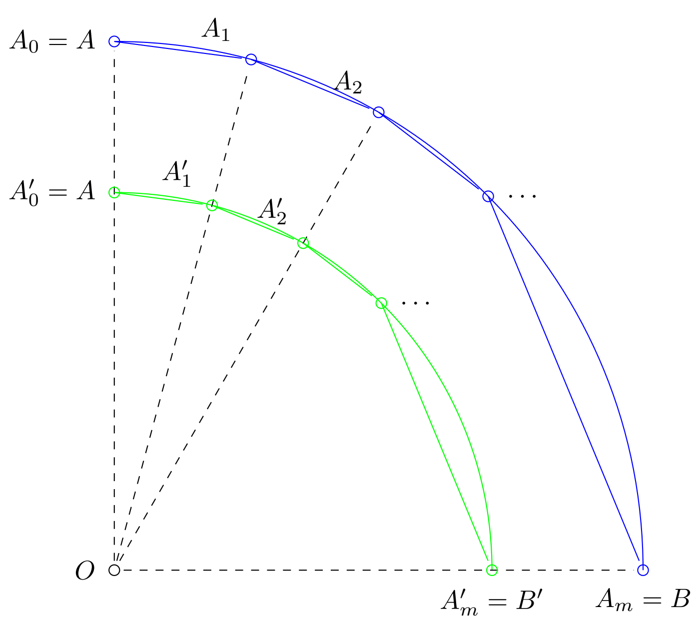


Рис. 4.5: Гомотетия вписанных ломаных.

Утверждение 12. *Если в окружности радиуса R задана дуга $\overset{\frown}{AB}$ угловая мера которой равна α (радиан), то длина дуги вычисляется по формуле:*

$$|\overset{\frown}{AB}| = R\alpha.$$

Доказательство.

Выберем дугу $\overset{\frown}{A'B'}$ в единичной окружности. Для любой ломаной, вписаной в $\overset{\frown}{A'B'}$ сделаем гомотетию с коэффициентом, равным R (см. рис. 4.3.4).

Очевидно, ломаная перейдет в ломаную, вписанную в дугу $\overset{\frown}{AB}$, а ее длина увеличится (или уменьшится, если $R < 1$) в R раз. Т.В.Г. длин ломаных, вписанных в $\overset{\frown}{A'B'}$ равна α, следовательно, для ломаных, вписанных в $\overset{\frown}{AB}$ она равна $R\alpha$.

Глава 5

Мощность множества

Мощность множества. Числовые множества.

5.1 Счетные множества.

Еще в XVII веке Галилео Галилей задал вопрос: Каких чисел больше — натуральных или точных квадратов. С одной стороны, не все натуральные числа являются точными квадратами, более того, квадраты идут все реже и реже. Например, между числами 1 000 001 и 1 002 000 нет ни одного точного квадрата.

Упражнение 147. Докажите это.

С другой стороны, каждому натуральному числу можно поставить в соответствие его квадрат.

В итоге Галилей приходит к выводу: *Я не вижу возможности никакого другого решения, как признать, что бесконечно количество чисел вообще, бесконечно число квадратов, бесконечно и число корней. Нельзя сказать, что число квадратов меньше количества всех чисел, а последнее больше: в конечном выводе свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам.*

Для разрешения подобных парадоксов было предложено понятие мощности множества. Пока мы не можем строго определить что такое мощность[1], но можем описать множества, у которых она одинаковая.

Приведем сначала неформальное определение:
Представьте, что в большой аудитории стоят стулья и по ней бегают школьники. Как определить, что количество стульев равно количеству школьников? Конечно, можно пересчитать тех и других, но аудитория большая, школьники бегают — легко сбиться при подсчете... Поэтому

[1] Для любопытных приведем здесь ссылку:
`http://ru.wikipedia.org/wiki/Мощность_множества`

проще попросить школьников сесть на стулья. Если остались свободные стулья, значит стульев больше чем школьников, если кому-то не хватило стула, значит школьников больше. А если не останется ни свободных стульев, ни школьников, которым не досталось стула, то, значит, школьников и стульев поровну.

Определение 49. Множества A и B называются **равномощными**, если существует взаимно однозначное соответствие (т.е. биекция) между их элементами. При этом каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие один элемент $b = f(a) \in B$ и каждому $b \in B$ соответствует ровно один элемент $a \in A$, такой, что $f(a) = b$.

Напомним, что *инъекцией* называется отображение f, которое переводит разные элементы в разные, т.е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. Например, отображение $f_1(x) = x^3$ является инъекцией, а $f_2(x) = x^2$ — нет. *Сюръекцией* называется отображение $X \to Y$, которое «накрывает» все множество Y, т.е. $\forall y \in Y \exists x \in x : f(x) = Y^2$. Например, отображение $f_1(x) = x^3$ является сюръекцией, а $f_2(x) = x^2$ — нет. *Биекцией* (взаимно однозначным отображением) называется отображение которое является одновременно инъекцией и сюръекцией.

Обозначается мощность множества $|A|$, если множество конечное, то $|A| = n$ — число элементов множества. Для мощности бесконечных множеств некоторые обозначения будут приведены позднее.

Будем говорить, что мощность множества A не превосходит мощности B и обозначать $|A| \leq |B|$ (или $|B| \geq |A|$), если существует инъекция из A в B. Если $|A| \leq |B|$ и множества не являются равномощными, то будем говорить что A множество меньшей мощности, чем B и обозначать $|A| < |B|$ (или $|B| > |A|$).

Пример 16. *Рассмотрим множество* $[0, 1]$ *и множество* $[0, 1)$*. Казалось бы, во втором на одну точку меньше, но, оказывается, эти множества равномощны. Построим следующую функцию:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots \\ \frac{1}{2^{k+1}}, & \text{если } x = \frac{1}{2^k}. \end{cases}$$

Она переводит $1 \to \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \to \frac{1}{4}$, *и т. д. Таким образом, каждому элементу* $[0, 1]$ *ставится в соответствие элемент* $[0, 1)$ *и наоборот.*

Определение 50. Множество, равномощное множеству натуральных чисел называется **счетным.** Его мощность обозначается символом $\aleph_0$ (читается алеф–ноль).

Хорошим примером, иллюстрирующим свойства счетных множеств, является так называемый *отель Гильберта.* Предположим, что где-то далеко,

[2]Это определение, вообще говоря, зависит от Y. Так, например, $f(x) = \sqrt{x}$ не является сюръекцией если рассматривать его как отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, но является таковой как отображение $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

на краю Галактики расположен отель, в котором бесконечное число номеров (одноместных), все они пронумерованы: 1,2,3, …, 2014, … Допустим, что все номера заняты постояльцами. Прибывает еще один постоялец. Можно ли его поселить в отеле? Оказывается можно! Переселим постояльца из первого номера во второй, из второго в третий, … из 2014-го — в 2015-й, и т. д. Тогда первый номер освободится, в него можно будет поселить нового постояльца. Пусть на следующий день прибыло 100 постояльцев. Найдется ли место для них? Конечно! Переселяем $1 \to 101$, $2 \to 102$, … $2013 \to 2113$. В итоге первые 100 номеров свободны — туда и селим новых постояльцев. Но на следующий день прибывает уже бесконечное число постояльцев! Куда их поселить? Переселяем $1 \to 2$, $2 \to 4$, … $2013 \to 4026$,… В результате становятся свободны все комнаты с нечетными номерами, а их бесконечное число. Там и разместятся вновь прибывшие.

Допустим теперь, что постоялец комнаты №2014 решил покинуть отель. Чтобы номер не простаивал переселим $2015 \to 2014$, $2016 \to 2015$, … — и опять все номера заняты!

Допустим, что захотели уехать все постояльцы, занимающие комнаты с простыми номерами 2, 3, 5, 7, 11, … Как вы, наверное, знаете, простых чисел бесконечно много[3]. Переселим оставшихся постояльцев следующим образом: $4 \to 2$, $6 \to 3$, $8 \to 4$, $9 \to 5$, $10 \to 6$, … и т.д. Более формально, пусть $p(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x. Тогда переселяем $x \to x - p(x)$. В результате все номера снова заняты.

Лемма 1. *Подмножество счетного множества является конечным или счетным.*

Доказательство.
Пусть $B \subset A$, если оно конечно, то лемма доказана; предположим, что оно бесконечно. Занумеруем элементы множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ следующим образом: пусть $f(1)$ — наименьший номер k_1, такой, что $a_{k_1} \in B$. Далее, $f(2)$ — наименьший номер $k_2 \neq k_1$, такой, что $a_{k_2} \in B$. И так далее, $f(n)$ — наименьший номер $k_n \neq k_1, \ldots, k_{n-1}$, такой, что $a_{k_2} \in B$. Отображение $f : \mathbb{N} \mapsto B$ является биекцией, т.к. любой элемент $b \in B$ является элементом A с каким-то номером $\hat{k}$, следовательно, будет рассмотрен на некотором шаге. $\square$

Следствие 2. *Пусть существует инъекция $f : A \mapsto \mathbb{N}$, тогда A — конечное или счетное. Действительно, рассмотрим подмножество $Y \subset \mathbb{N}$, заданное следующим образом: $Y = \{y = f(a) : a \in A\}$. Тогда по лемме 1 множество Y конечно или счетно, причем $f : A \to Y$ — биекция, т.е. $|A| = |Y|$.*

Лемма 2. *Объединение конечного и счетного множеств является счетным.*

---

[3] А если не знаете, то вот доказательство Евклида:
Предположим, что простых чисел конечное количество: $p_1, \ldots, p_n$. Тогда рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. У него должен быть простой делитель (или оно само простое), не совпадающий ни с одним из $p_1, \ldots, p_n$. Противоречие.

Доказательство.
Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ — конечное множество, а $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ — счетное. Рассмотрим $f(n) = \begin{cases} a_n, & n \le N; \\ b_{n-N}, & n > N. \end{cases}$. Очевидно, $f : \mathbb{N} \mapsto A \cup B$ — биекция. $\square$

Лемма 3. *Объединение двух счетных множеств является счетным.*

Доказательство.
Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$. Рассмотрим

$$f(n) = \begin{cases} a_k, & n = 2k; \\ b_k, & n = 2k+1. \end{cases}.$$

Очевидно, $f : \mathbb{N} \mapsto A \cup B$ — биекция. $\square$

Следствие 3. *Объединение $N \in \mathbb{N}$ счетных множеств является счетным.*

Лемма 4. *Декартово произведение двух счетных множеств является счетным.*

Доказательство.
Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m, \ldots\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$. Рассмотрим отображение $f : A \times B \mapsto \mathbb{N}$, которое задано так: $f(a_m, b_n) = 2^m \cdot 3^n$. Разложение числа на простые множители единственно, следовательно, f — инъекция. По следствию 2 множество $A \times B$ счетно. $\square$

Следствие 4. *Объединение счетного количества счетных множеств является счетным.*

Следствие 5. *Множество $\mathbb{Z}$ — счетное.*

Доказательство.
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$. $\square$

Лемма 5. *Множество $\mathbb{Q}$ — счетное.*

Доказательство.
Рассмотрим множество пар $P = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ — оно счетное по лемме 4. Построим отображение $f : \mathbb{Q} \to P$, такое, что $f(\frac{m}{n}) \to (m, n)$, если дробь $\frac{m}{n}$ несократима[4]. Следовательно, по следствию 2 множество $\mathbb{Q}$ счетно. $\square$

[4]Это условие нужно для однозначности задания отображения.

5.2 Континуальные множества

У читателя могло возникнуть впечатление, что все бесконечные множества являются счетными. Но это не так, как показывает следующая теорема:

Теорема 13. *Множество точек на отрезке* $[0;1]$ — *не счетное.*

Доказательство.
Предположим обратное — что можно как-то занумеровать все числа из отрезка: $[0;1] = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Рассмотрим десятичные записи каждого из этих чисел:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}\ldots \\ a_2 &= 0{,}\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_n^{(2)}\ldots \\ &\ldots \\ a_n &= 0{,}\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)}\ldots\alpha_n^{(n)}\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

Если возможно два варианта записи числа, например 0,5 и 0,49...9..., будем (для определенности) выбирать вариант с нулями, а не с девятками.

Выберем диагональную последовательность $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\ldots\alpha_n^{(n)}$, $\ldots$, по ней построим последовательность $\beta_i = \begin{cases} 1, & \alpha_i^{(i)} = 2; \\ 2, & \alpha_i^{(i)} \neq 2, \end{cases}$ т.е. просто заменим все цифры 2 на 1, а остальные — на цифру 2. Составим из этих цифр число $b = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$. Очевидно, b принадлежит отрезку $[0,1]$ но не равно ни одному из чисел a_i, поскольку отличается от каждого из них по крайней мере в одном разряде. Противоречие.[5] □

Определение 51. Мощность множества $[0,1]$ называется **континуум** и обозначается $|[0,1]| = \mathfrak{c}$.

Следствие 6. *Множество* $\mathbb{R}$ — *не счетное.*

5.3 Теорема Кантора

Приведем здесь забавную задачу из книги Р.М.Смаллиана «Как же называется эта книга»:

Однажды инспектор Крэг посетил некую общину и побеседовал с одним из ее членов — социологом МакСнурдом, который сообщил следующее:
— Члены общины организовали несколько клубов. Каждый член общины может являться членом более одного клуба. Каждый клуб получает название в честь одного из членов общины. Никакие два клуба не названы

[5] Внимательный читатель может заметить, что записи $0{,}49..9\ldots$ и $0{,}50\ldots0\ldots$ обозначают одно и то же число, хотя и отличаются в каждом разряде. Но в данном случае число b составлено только из цифр 1 и 2, поэтому не может иметь альтернативной формы записи.

в честь одного и того же члена общины, и имя каждого члена общины носит какой-то клуб. Член общины не обязательно должен быть членом клуба, носящего его имя. Всякого, кто является членом клуба, носящего его имя, мы называем номинабельным. Всякого, кто не является членом клуба, носящего его имя, мы называем неноминабельным. Самое удивительное в нашей общине - это то, что все неноминабельные ее члены входят в один клуб.
Инспектор Крэг на миг задумался и внезапно понял, что МакСнурд не очень силен в логике: в его истории концы не сходятся с концами. Почему?

Упражнение 148. Почему?

Определение 52. Будем обозначать $2^A = \{A' \subset A\}$ — множество всех подмножеств A.

Заметим, что если $|A| = n$ — конечное множество, то у него ровно 2^n подмножеств.

Известный немецкий[6] математик Георг Кантор сформулировал в 1899 году следующую теорему:

Теорема 14 (Кантор)**.** *Пусть A — некоторое множество, тогда $|A| < |2^A|$*

Доказательство.
Предположим обратное, т.е. $|A| = |2^A|$. Тогда существует биекция $f : A \to \to 2^A$, которая каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие $f(a) \subset A$. Пусть $B = \{a \in A \,|\, a \notin f(a)\}$. Поскольку f — биекция, то найдется $b = = f^{-1}(B)$, то есть $f(b) = B$. Предположим, что $b \in B$. Тогда (по определению множества B) $b \notin f(b) = B$. Если же предположить, что $b \notin B$, то получаем $b \in f(b) = B$ — в обоих случаях приходим к противоречию. □

На этой теореме основан слуюющий парадокс:

Парадокс Кантора

Пусть A — множество всех множеств. Тогда $2^A \subset A$ (т.к. любое подмножество является его элементом). Следовательно $|2^A| \leqslant |A| < |2^A|$. Противоречие.

Следствие 7. *Для любого множества можно построить множество большей мощности. В частности, множество $2^{\mathbb{R}}$ больше континуума и называется гиперконтинуум.*

5.4 Теорема Кантора – Бернштейна

Из леммы 1 вытекает, что для доказательства счетности бесконечного множества A достаточно построить его иньекцию в $\mathbb{N}$. Это является частным случаем некоторого общего факта, который позволяет легко доказывать равномощность множеств.

[6]Георг Кантор родился и жил до 11 лет в Санкт-Петербурге.

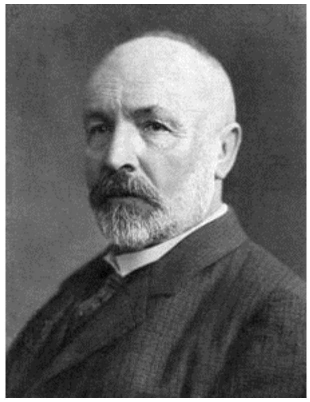


Рис. 5.1: Георг Кантор (1845–1918)

Теорема 15 (Кантор – Бернштейн). *Пусть для множеств A и B существуют инъекции $f : A \mapsto B$ и $g : B \mapsto A$. Тогда $|A| = |B|$, т.е. множества A и B равномощны.*

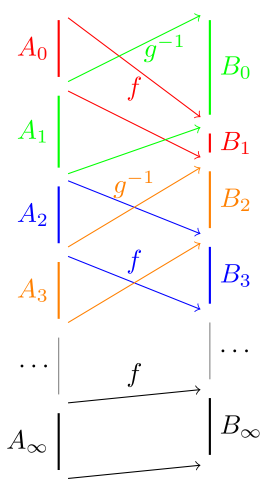


Рис. 5.2: Теорема Кантора – Бернштейна.

Доказательство.
Обозначим $A_0 = A \backslash g(B)$, $B_0 = B \backslash f(A)$.[7] $A_1 = g(B_0)$, $B_1 = f(A_0)$. Несложно заметить, что $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ и построить биекцию между $A_0 \cup A_1$ и $B_0 \cup B_1$.

[7]Напомним, что $f(A)$ обозначает образ множества A при отображении f.

Далее рассмотрим множества $\hat{A}_1 = A \setminus (A_0 \cup A_1)$ и $\hat{B}_1 = B \setminus (B_0 \cup B_1)$ и проведем для них аналогичное построение: $A_2 = \hat{A}_1 \setminus g(\hat{B}_1)$, $B_2 = \hat{B}_1 \setminus \setminus f(\hat{A}_1)$ и $A_3 = g(B_2)$, $B_3 = f(A_2)$. Продолжим это построение, на k–м шаге будем рассматривать множества $\hat{A}_k = A \setminus (\bigcup\limits_{i=0}^{2k-1} A_i$ и $\hat{B}_k = B \setminus (\bigcup\limits_{i=0}^{2k-1} B_i)$. Для них построим $A_{2k} = \hat{A}_k \setminus g(\hat{B}_k)$, $B_{2k} = \hat{B}_k \setminus f(\hat{A}_k)$ и $A_{2k+1} = g(B_{2k})$, $B_{2k+1} = f(A_{2k})$.

Также обозначим $A_\infty = A \setminus (\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ и $B_\infty = B \setminus (\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} B_i)$.

Итак, получили разбиения множеств A и B на непересекающиеся компоненты: $A = \big(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} A_k\big) \cup A_\infty$; и $B = \big(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} B_k\big) \cup B_\infty$. Построим теперь биективное соответствие между ними. Рассмотрим отображение (см. рис. 5.2)

$$F(a) = \begin{cases} f(a), & a \in A_{2k} \text{ или } a \in A_\infty; \\ g^{-1}(a), & a \in A_{2k+1}. \end{cases}$$

Оно является биекцией, т.к. для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ отображение $f : : A_{2k} \mapsto B_{2k+1}$ будет биекцией и $g^{-1} : A_{2k+1} \mapsto B_{2k+2}$ — тоже будет биекцией. □

Теорема 16. *Квадрат* $[0, 1] \times [0, 1]$ *имеет мощность континуум.*

Доказательство.
Очевидно, отрезок можно инъективно отобразить в квадрат. Построим инъекцию квадрата в отрезок. Для любой пары чисел (x, y) выберем десятичное разложение, не содержащее девяток в периоде: $x = 0{,}x_1x_2...x_n...$, $y = 0{,}y_1...y_n....$ Отобразим их в число $f(x, y) = 0{,}x_1y_1x_2y_2...x_ny_n...$, очевидно, принадлежащее отрезку $[0, 1]$. Поскольку мы выбирали представление x и y без девяток в периоде, то их не будет и в $f(x, y)$. Следовательно, отображение — инъекция. Тогда, по теореме Кантора–Бернштейна получаем, что отрезок и квадрат равномощны.

5.5 Множество Кантора

Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.
Шаг 1: Выбросим из него середину, т.е. интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Получим два отрезка $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$.
Шаг 2: Из каждого отрезка выбросим середину, получим 4 отрезка: $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ и $[\frac{8}{9}, 1]$.
...
Шаг n: Имеется 2^{n-1} отрезков вида $\frac{a_i^{(n-1)}}{3^{n-1}}, \frac{b_i^{(n-1)}}{3^{n-1}}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Из каждого отрезка выбросим середину, получим 2^n отрезков: $\frac{a_i^{(n)}}{3^n}, \frac{b_i^{(n)}}{3^n}$, $i = = 1, 2, \ldots, 2^n$.

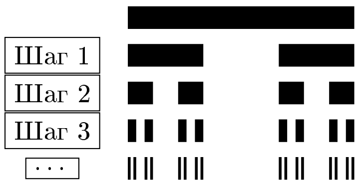


Рис. 5.3: Множество Кантора

Так будем делать до бесконечности. Т.е. рассмотрим $\mathcal{K} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где K_n — объединение отрезков, полученных на n-м шаге. Множество $\mathcal{K}$ называется **множество Кантора** (см. рис. 5.3).

Несложно заметить, что на каждом шаге выбрасываются интервалы, длина которых составляет $\frac{1}{3}$ от отрезков. Таким образом, суммарная длина оставшихся отрезков составляет $\frac{2}{3}$ от длины отрезков на предыдущем шаге. Поэтому на n-м шаге суммарная длина отрезков составит $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, что стремится к нулю при $n \to \infty$. Получается, что в этом множестве должно остаться очень мало точек. Оказывается, что множество оставшихся точек не только бесконечно, но еще и равномощно исходному отрезку.

Теорема 17. $|\mathcal{K}| = \mathfrak{c}$.

Доказательство.
Запишем все числа на отрезке $[0, 1]$ в троичной системе счисления. Тогда на n-м шаге будут выброшены числа, имеющие 1 в n-м разряде (кроме чисел вида $0, a_1 \dots a_{n-1}1(0)$ и $0, a_1 \dots a_{n-1}1(2)$). Таким образом, числа, образованные только цифрами 0 и 2 останутся. Выберем произвольное число из $[0, 1]$, запишем его в двоичной системе счисления, а потом заменим все цифры 1 на 2. Получим троичную запись некоторого числа, которое принадлежит множеству Кантора. Таким образом, каждому $x \in [0, 1]$ поставлено в соответствие $y \in \mathcal{K}$, причем это отображение — инъекция. С другой стороны, $\mathcal{K} \subset [0, 1]$. Следовательно, по теореме Кантора – Бернштейна эти множества равномощны.

Часть II

Последовательности и ряды

Глава 6

Последовательности.

6.1 Определение и примеры

Определение 53. Последовательностью (числовой) называется функция, определенная на множестве натуральных чисел $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Принято обозначение $a(n) = a_n$, число a_n называется n-м членом последовательности. Саму последовательность обычно записывают следующим образом: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

6.1.1 Прогрессии

Пример 17. Арифметическая прогрессия. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего с некоторым числом d, которое называют* **разностью** *прогрессии, т.е. $(a_{n+1} = a_n + d)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Верны формулы для n–го члена*

$$\boxed{a_n = a_1 + d(n-1)}$$

и для суммы первых n членов прогрессии

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot \frac{n}{2}}.$$

Доказательство — индукцией по $n \in \mathbb{N}$, предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пример 18. Геометрическая прогрессия. *Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, каждый член которой (начиная со 2–го) равен произведению предыдущего с некоторым числом q, которое называют* **знаменателем** *прогрессии, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}(a_{n+1} = a_n + d)$. Верны следующие формулы для n-го члена*

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

и для суммы первых n членов прогрессии

$$\boxed{S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ если } q \neq 1.}$$

Доказательство.
Индукция по $n \in \mathbb{N}$, предоставляется читателю в качестве упражнения.

6.1.2 Числа Фибоначчи

Пример 19. Числа Фибоначчи. *Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в которой первые два члена равны 1, а каждый последующий равен сумме двух предыдущих.*

Утверждение 13. *Верна формула для n-го члена последовательности Фибоначчи:*

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ (формула Бинэ) }.$$

Доказательство.
Обозначим $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Несложно заметить, что $\phi_1 + \phi_2 = 1$; $\phi_1 \cdot \phi_2 = -1$, следовательно, по теореме Виета, эти числа есть корни квадратного уравнения $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, а значит $\phi_i^2 = \phi_i + 1$, $i = 1, 2$. Докажем теперь формулу Бинэ индукцией по $n \in \mathbb{N}$

- База индукции. Проверяем для $n = 1, 2$:

  $$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^1 - \phi_2^1) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1;$$

  $$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^2 - \phi_2^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1 - \phi_2)(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

  Таким образом, формула верна при $n = 1, 2$.

- Шаг индукции Поскольку $\varphi_{1,2}$ — корни уравнения $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, то для них выполнено тождество: $\phi^2 = \phi + 1$. Умножив обе части на ϕ^{n-1}, получим

  $$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}. \tag{6.1.1}$$

  Предположим, что формула Бинэ верна для $1, 2, \ldots, n$ и докажем ее для $n + 1$:

  $$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^{n-1} - \phi_2^{n-1}) =$$
  $$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\phi_1^n + \phi_1^{n-1}) - (\phi_2^n + \phi_2^{n-1}) \right].$$

  Применив равенство 6.1.1, получим $\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi_1^{n+1} - \phi_2^{n+1} \right]$. □

6.1.3 Ограниченные и монотонные последовательности

Определение 54. Последовательность a_n называют **ограниченной сверху** если все ее члены не превосходят некоторого числа M, т.е. при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $a_n \leqslant M$.

Определение 55. Последовательность a_n называют **ограниченной снизу** если все ее члены не меньше некоторого числа m, т.е. при всез $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $a_n \geqslant m$.

Определение 56. Последовательность a_n называют **ограниченной** если она ограничена сверху и снизу.

Например, последовательность $a_n = -n^2$ является ограниченной сверху, но не снизу (и, значит, не является ограниченной).

Определение 57. Последовательность a_n называют **возрастающей** если каждый ее член строго больше предыдущего. Т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} > a_n$.

Определение 58. Последовательность a_n называют **убывающей** если каждый ее член строго меньше предыдущего. Т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} < a_n$.

Определение 59. Последовательность a_n называют **неубывающей** если каждый ее член не меньше предыдущего. Т.е. $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \geqslant a_n$

Определение 60. Последовательность a_n называют **невозрастающей** если каждый ее член не больше предыдущего. Т.е. $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \leqslant a_n$.

Определение 61. Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называют **монотонными**.

Например, последовательность $a_n = -n^2$ является убывающей, а последовательность $a_n = 2013$ является неубывающей и невозрастающей.

6.1.4 Ловушки последовательности

Определение 62. Множество A называют **ловушкой** последовательности a_n если начиная с некоторого номера все члены последовательности попадают в это множество, т.е. $\exists N \in \mathbb{N}$, такое, что $\forall n > N(a_n \in A)$

Лемма 6. *Последовательность a_n ограничена тогда и только тогда, когда существует $M > 0$, такое, что отрезок $[-M, M]$ является ловушкой этой последовательности.*

Доказательство.
1) Пусть последовательность a_n ограничена, т.е. существуют m_1 и m_2, такие, что $\forall n(a_n \in [m_1, m_2])$. Выберем $M = \max(m_1, m_2)$, тогда $a_n \in [-M, M]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $[-M, M]$ — ловушка a_n.

2) В обратную строну. Пусть $[-M, M]$ — ловушка последовательности a_n. Значит, начиная с некоторого номера N выполнены неравенства $-M \leqslant \leqslant a_n \leqslant M$. Выберем

$$m_1 = \min(a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, -M)$$

и
$$m_2 = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, M).$$

Тогда, очевидно, неравенства $m_1 \leqslant a_n \leqslant m_2$ выполнены для любого n, что и требовалось доказать.

Определение 63. Множество A называют **кормушкой** последовательности a_n если в это множество попадают члены последовательности со сколь угодно большим номером. $\forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : (a_n \in A)$

Пример 20. *Рассмотрим последовательность* $(-1)^n_n$. *Интервал* $(-1, 1]$ *является кормушкой, но не ловушкой этой последовательности. А отрезок* $[-1, 1]$ *является и ловушкой и кормушкой.*

Упражнение 149. Доказать, что любая ловушка является кормушкой (для той же последовательности).

Упражнение 150. Пусть A и B — кормушки последовательности a_n. Будет ли кормушкой а)$A \cup B$; б) $A \cap B$?

Упражнение 151. Пусть A и B — ловушки последовательности a_n. Будет ли ловушкой а)$A \cup B$; б) $A \cap B$?

Решение. (пункта б.) По определению ловушки найдутся N_1, N_2 такие, что $\forall n > N_1 (a_n \in A)$ $\forall n > N_2 (a_n \in B)$. Тогда взяв $N_0 = \max(N_1, N_2)$, получим $\forall n > N_0 (a_n \in A \cup B)$, следовательно $A \cap B$ — ловушка.

6.2 Бесконечно малые (б.м.п.) и бесконечно большие (б.б.п.) последовательности

6.2.1 Определения и примеры

Определение 64. Последовательность a_n называется **бесконечно малой последовательностью** (сокращенно б.м.п.) если для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(0)$ является ее ловушкой.

Пример 21. *Последовательность* $a_n = \frac{1}{n}$ *является б.м.п. Действительно, зафиксируем* $\varepsilon > 0$ *и рассмотрим* $N = [1/\varepsilon] + 1$. *Тогда для любого* $n > N$ *выполнено* $a_n = 1/n < 1/N < \varepsilon$, *т.е.* $a_n \in U_\varepsilon(0)$.

Определение 65. Последовательность a_n называется **бесконечно большой последовательностью** (сокращенно б.м.п.) если для любого $\varepsilon > 0$ множество $U_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$ является ее ловушкой.

6.2.2 Свойства б.м.п. и б.б.п.

Утверждение 14. *Любая б.м.п. ограничена.*

Доказательство.
Пусть a_n — б.м.п. По определению б.м.п. найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что $\forall n > N(a_n \in U_1(0))$. Выберем $C = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |A_N|, 1)$. Очевидно (для всех натуральных n) $|a_n| < C$, следовательно $-C < a_n < C$, что и требовалось доказать.

Утверждение 15. *Любая б.б.п. неограничена.*

Доказательство.
Вытекает из леммы 6.

Утверждение 16. *Пусть a_n — б.б.п. и $a_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $b_n = \frac{1}{a_n}$ — б.м.п.*

Доказательство.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $M = \frac{1}{\varepsilon}$. По определению $(-\infty, M) \cup (M, \infty)$ является ловушкой a_n, что равносильно тому, что $|a_n| > M$ начиная с некоторого номера. Это равносильно (при $a_n \neq 0$) тому, что $|b_n| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$.

Утверждение 17. *$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ тогда и только тогда, когда $a - a_n$ является б.м.п.*

Доказательство.
Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(a)$ — ловушка. Следовательно $\forall n > N(|a - a_n| < \varepsilon)$, а значит $\forall n > N(a - a_n) \in U_\varepsilon(0)$, что и требовалось доказать.

В другую сторону. Пусть последовательность $a - a_n$ является б.м.п. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(0)$ является ее ловушкой. Следовательно, $|a - a_n| < \varepsilon$, а значит $a_n \in U_\varepsilon(a)$.

6.2.3 Арифметические свойства б.м.п.

Утверждение 18. *Пусть a_n — б.м.п., C — некоторое число. Тогда $C \cdot a_n$ — тоже б.м.п. Другими словами, произведение б.м.п. на число есть б.м.п.*

Доказательство.
Если $C = 0$ то $0 \cdot a_n$, очевидно, б.м.п. Пусть $C \neq 0$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|C|} > 0$. По определению б.м.п. найдется N такое, что $\forall n > N(a_n \in U_{\varepsilon'}(0))$. Это означает, что $\forall n > N |a_n| < \varepsilon'$, следовательно $\forall n > N |C \cdot a_n| < \varepsilon' \cdot |C| = \varepsilon$, а значит $C \cdot a_n$ является б.м.п.

Утверждение 19. *Пусть a'_n и a''_n — б.м.п. Тогда a_n, где $a_n = a'_n + a''_n$ — тоже б.м.п. Другими словами, сумма б.м.п. есть б.м.п.*

Доказательство.
Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Тогда найдутся N и N', такие, что $\forall n > N(|a'_n| < \varepsilon')$ и $\forall n > N'(|a''_n| < \varepsilon')$. Следовательно $\forall n > \max(N, N')(|a_n| = |a'_n + a''_n| \leqslant |a'_n| + |a''_n| < 2 \cdot \varepsilon' = \varepsilon)$. А значит a_n — б.м.п.

Утверждение 20. *Пусть a_n — б.м.п., c_n — ограниченная последовательность. Тогда b_n, где $b_n = a_n \cdot c_n$ — тоже б.м.п. Другими словами, произведение б.м.п. на ограниченную последовательность есть б.м.п.*

Доказательство.
c_n — ограниченная последовательность, следовательно существуют m и M, такие, что $\forall n \in \mathbb{N}(m \leqslant c_n \leqslant M)$. Выберем $C = \max(|m|, |M|) + 1 > 0$, тогда $\forall n \in \mathbb{N}(|c_n| < C)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C} > 0$. По определению б.м.п. найдется N такое, что $\forall n > N |a_n| < \varepsilon'$, следовательно $\forall n > N |a_n \cdot c_n| < |a_n \cdot C| < \varepsilon' \cdot C = \varepsilon$, а значит $a_n \cdot c_n$ является б.м.п.

Следствие 8. *Пусть a'_n и a''_n — б.м.п. Тогда последовательность a_n, где $a_n = a'_n \cdot a''_n$ — тоже б.м.п. Другими словами, произведение б.м.п. есть б.м.п.*

Доказательство.
Вытекает из утверждения 14 (о том, что любая б.м.п. ограничена).

Утверждение 21. *Пусть a_n — б.м.п., $A \neq 0$, и $(A + a_n \neq 0)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\left\{b_n = \frac{1}{a_n + A}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.*

Доказательство.
Не ограничивая общности считаем $A > 0$.

Выберем N так, что $\forall n > N(a_n \in U_{A/2}(0))$. Тогда $|A + a_n| > A - a_n > A/2$, следовательно $|b_n| < 2/A$.

Пусть
$$M = \max\left(\left|\frac{1}{A + a_1}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{A + a_N}\right|, \frac{2}{A}\right).$$
Очевидно $\forall n \in \mathbb{N}(|b_n| < M)$.

Следствие 9. *Пусть a_n, b_n — б.м.п., $A \neq 0$, и $A + a_n \neq 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\left\{c_n = \frac{b_n}{a_n + A}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.п.*

Доказательство.
Вытекает из утверждений 20 и 21.

6.3 Предел последовательности. Арифметические свойства пределов

Определение 66. Число A называют **пределом** последовательности a_n, если последовательность $b_n = a_n - A$ является б.м.п.

Определение 67. Число A называют пределом последовательности a_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Другими словами, любая ε-окрестности точки A является ловушкой последовательности a_n.

Утверждение 22. *Определения 66 и 67 эквивалентны.*

Доказательство.
Вытекает из определения б.м.п.

Пример 22. *Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n+1}{n}$. Очевидно, что $a_n - 1$ — б.м.п., следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.*

Пример 23. *Рассмотрим последовательность $a_n = (-1)^n$. Очевидно, что предела a_n не существует. Действительно, взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}$ получим, что как 1, так и -1 должны принадлежать некоторой ε-окрестности, что невозможно.*

Утверждение 23. *Если предел последовательности существует, то он единственен, т.е. у последовательности не может быть два разных предела.*

Доказательство.
Допустим существует два различных предела $A \not= B$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2} > 0$, тогда, начиная с некоторого номера, все члены последовательности попадали бы в $U_\varepsilon(A)$ и в $U_\varepsilon(B)$, что невозможно, т.к. $U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \emptyset$.

Утверждение 24. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.*

Доказательство.
Из утверждения 17 следует, что $a - a_n$ и $b - b_n$ — б.м.п. Тогда по утверждению 19 их сумма $\{(a-a_n)+(b-b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — тоже б.м.п. Перегруппировав, получим, что $\{(a+b-(a_n+b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.п. Следовательно, $predel(a_n+b_n) = a+b$.

Упражнение 152. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.

Утверждение 25. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.*

Доказательство.
Из утверждения 17 следует, что $a - a_n$ и $b - b_n$ — б.м.п. Рассмотрим последовательность

$$a \cdot b - a_n \cdot b_n = a \cdot (b - b_n) + (a - a_n) \cdot b_n,$$

из утверждений 18 и 19 вытекает, что она — б.м.п. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Утверждение 26. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}(b_n \neq 0)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.*

Доказательство.
Пусть, для определенности $b > 0$. Тогда найдется N такое, что $b_n \in U_{b/2}(b)$ при всех $n > N$, а значит $b_n > \frac{b}{2} > 0$. Пусть

$$b_0 = \min(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_N|, b/2),$$

тогда $b_0 > 0$, поскольку все числа $|b_1|$, $|b_2|$, $\ldots$, $|b_N|$, $b/2$ положительны по условию. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}(|b_n| > b_0)$. Следовательно $\left|\frac{1}{b_n}\right| \leqslant \frac{1}{b_0}$, поэтому последовательность b_n ограничена. Рассмотрим $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b-b_n}{b_n \cdot b} = (b-b_n)\cdot\frac{1}{b_n}\cdot\frac{1}{b}$. Но $b - b_n$ — б.м.п. $\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена, а $\frac{1}{b}$ — константа. Тогда $\{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.п., следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, что и требовалось доказать.

Следствие 10. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ *и* $\forall n \in \mathbb{N}(b_n \neq 0)$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство.
Очевидно вытекает из утверждений 25 и 26.

Утверждение 27. *Пусть* a_n *— б.м.п. и* $\forall n \in \mathbb{N}(|b_n| \leqslant a_n)$. *Тогда* b_n *— б.м.п.*

Доказательство.
Для произвольного $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(0)$ — ловушка a_n. Значит $\forall n > N(a_n \in U_\varepsilon(0))$. Тогда $|a_n| < \varepsilon$, следовательно $|b_n| \leqslant |a_n| < \varepsilon$, а значит $b_n \in U_\varepsilon(0)$. Получаем, что $U_\varepsilon(0)$ является ловушкой b_n при всех $\varepsilon > 0$. Следовательно b_n — б.м.п.

Теорема 18. (О двух милиционерах) *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}(a_n \leqslant c_n \leqslant b_n)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$. *Тогда предел* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ *существует и равен тому же числу* C.

Доказательство.
Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = C - C = 0$, следовательно $b_n - a_n$ — б.м.п. Очевидно, $0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n$, а значит по предыдущему утверждению $c_n - a_n$ — б.м.п. А значит $\{c_n - a\}_{n=1}^{\infty} = \{(c_n - a_n) + (a_n - C)\}_{n=1}^{\infty}$ — тоже б.м.п. следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$.

Теорема 19 (Предельный переход в неравенствах)**.** *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\forall n > N(a_n \leqslant C)$. *Тогда* $a \leqslant C$. *Другими словами, если все члены последовательности, начиная с некоторого* N *не превосходят какого-то числа* C, *то и предел последовательности не может быть больше* C.

Доказательство.
Предположим обратное, т.е. что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n > C$. Выберем $\varepsilon = \frac{a-C}{2}$. И рассмотрим окрестность $U_\varepsilon(a)$ которая по определению предела есть ловушка последовательности a_n. Тогда найдется $a_n \in U_\varepsilon(a)$ со сколь угодно большим номером n. Тогда $a_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-C}{2} = \frac{a+c}{2} > C$, что противоречит условию.

6.3.1 Примеры б.м.п и пределов.

Утверждение 28. *Последовательность* $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ — *б.м.п.*

Доказательство.
Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Тогда для всех $n > N$ выполнено $\left|\frac{1}{n}\right| < \left|\frac{1}{N}\right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Следствие 11. *Пусть* $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\left\{\frac{C}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — *б.м.п.*

Доказательство.
Сразу же следует из утверждения 18 и следствия 8.

Утверждение 29. *Пусть* $|q| < 1$, $a_n = n \cdot q^n$. *Тогда* a_n — *б.м.п.*

Доказательство.
Если $|q| < 1$, то можно представить $|q| = \frac{1}{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$(1+\alpha)^n = 1 + C_n^1 \cdot \alpha + C_n^2 \cdot \alpha^2 + \ldots > C_n^2 \cdot \alpha^2.$$

Тогда $n \cdot |q|^n < \frac{n}{C_n^2 \alpha^2} < \frac{4}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{n}$. Поскольку $\frac{1}{n}$ — б.м.п., а $\frac{4}{\alpha^2}$ — константа, следовательно, по утверждению 27 $n \cdot |q|^n$ — тоже б.м.п.

Утверждение 30. *Пусть* $C > 0$, *тогда* $C^{1/n} - 1$ — *б.м.п..*

Доказательство.
При $C = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $C > 1$, обозначим $\sqrt[n]{C} - 1 = \alpha_n$. Тогда $C = (1+\alpha_n)^n$ и, по неравенству Бернулли, $C = (1+\alpha_n)^n > 1 + n \cdot \alpha_n$. Следовательно, $0 < \alpha_n < \frac{C-1}{n}$ и, таким образом, б.м.п.

Пусть $0 < C < 1$, обозначим $C_1 = \frac{1}{C} > 1$. Как было доказано в предыдущем пункте $\beta_n = C_1^{1/n} - 1$ — б.м.п. Тогда $|C^{1/n} - 1| = C^{1/n} \cdot (C_1^{1/n} - 1) < C \cdot \beta_n$ — тоже б.м.п.

Следствие 12. *Пусть* $C > 0$, *тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C} = 1$.

Утверждение 31. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Доказательство.
Рассмотрим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, очевидно $\alpha_n > 0$. Возводя обе части в n–ю степень и раскрыв скобки (по биному Ньютона), получим

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + C_n^1 \alpha_n + C_n^2 \alpha_n^2 + \ldots > C_n^2 \alpha_n^2.$$

Следовательно, $0 < \alpha_n^2 < \frac{n}{C_n^2} = \frac{2}{n-1}$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, выберем $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 1$. Тогда при всех $n > N$ выполнено $\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{N}} < \varepsilon$. Таким образом, α_n — б.м.п., а значит $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6.4 Вложенные и стягивающиеся системы отрезков.

Простоты ради мы ограничимся рассмотрением только охоты на львов, живущих в пустыне Сахара. Перечисленные ниже методы с легкостью можно модифицировать и применять к другим плотоядным, обитающим в разных частях света.
...
Метод Больцано-Вейерштрасса. Рассекаем пустыню линией, проходящей с севера на юг. Лев находится либо в восточной части пустыни, либо в западной. Предположим для определенности, что он находится в западной части. Рассекаем ее линией, идущей с запада на восток. Лев находится либо в северной части, либо в южной. Предположим для определенности, что он находится в южной части, рассекаем ее линией, идущей с севера на юг. Продолжаем этот процесс до бесконечности, воздвигая после каждого шага крепкую решетку вдоль разграничительной линии. Площадь последовательно получаемых областей стремится к нулю, так что лев в конце концов оказывается окруженным решеткой произвольно малого периметра.

Г.Петард, К математической теории охоты.

Определение 68. Пусть заданы две последовательности a_n и b_n, такие, что $a_n \leq b_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Система отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **вложенной**, если

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

т.е. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$.

Определение 69. Система отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **стягивающейся**, если она вложенная и, кроме того для любого $\forall \varepsilon > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$, такое, что $|b_n - a_n| < \varepsilon$. Другими словами, последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если длины отрезков стремятся к нулю.

Теорема 20. *Пусть система отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ является вложенной. Тогда пресечение отрезков не пусто:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$

Доказательство.
Рассмотрим множества $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. По условию $A \leq B$. Тогда из аксиомы отделимости существует c, такое, что $A \leq c \leq B$, т.е. $a_n \leq c \leq b_n$ при любом n.

Теорема 21. *Пусть система отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ является стягивающейся. Тогда пересечение отрезков состоит ровно из одной точки:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Доказательство.

По теореме 20 пересечение $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ не пусто. Предположим, что оно состоит более чем из одной точки. Рассмотрим две различные точки $c', c'' \in P$ и выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}|c' - c''|$. Тогда, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $|b_n - a_n| < \varepsilon = \frac{1}{2}|c' - c''|$, что невозможно при $c', c'' \in [a_n, b_n]$.

Теоремы 20-21 о вложенных и стягивающихся отрезках носят в математике название **принцип Коши-Кантора**.

Замечание. Если последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ — стягивающаяся, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, где c — точка пересечения системы отрезков. Доказательство этого факта предоставляется в качестве упражнения.

Упражнения

Упражнение 153. Сформулировать, не используя слов «нет» и «не» следующие утверждения: a) последовательность a_n не ограничена; b) последовательность a_n не б.м.п.; c) последовательность a_n не имеет предела; d) последовательность a_n не фундаментальная.

Упражнение 154. Может ли ограниченная последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена? (Наибольший (наименьший) член — тот, который является верхней (нижней) гранью.)

Упражнение 155. a) Является ли последовательность $a_n = 10^n/n!$ ограниченной? b) Тот же вопрос для последовательности $a_n = 1{,}01^n$; c) $\ldots a_n = n^2/2^n$; d) $\ldots a_n = \sqrt[n]{n!}$; e) $\ldots a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$, где $a_0 = 0$; f) $\ldots a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; g) $\ldots a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$; h) $\ldots a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Упражнение 156. Ограничена ли последовательность, заданная формулами: a) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$; b) $a_{n+1} = a_n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1$; c) $a_1 = \cos 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \cos 1 - \sqrt{1 - a_n^2} \cdot \sin 1$? d) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$?

Упражнение 157. a) Доказать, что сумма и произведение ограниченных последовательностей ограничены: если последовательности a_n и b_n ограничены, то и последовательности $c_n = a_n + b_n$ и $d_n = a_n b_n$ ограничены. b) Верны ли аналогичные утверждения для разности и частного?

Упражнение 158. a) Может ли ловушка не быть кормушкой? b) Может ли кормушка не быть ловушкой? c) Можно ли утверждать, что один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ является ловушкой, если известно, что отрезок $[0, 2]$

является ловушкой? d) Можно ли утверждать, что один из отрезков $[0,1]$ и $[1,2]$ является кормушкой, если известно, что отрезок $[0,2]$ является кормушкой?

Упражнение 159. Володя считает, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда существует отрезок, являющийся её ловушкой. Прав ли он?

Упражнение 160. Закончить фразу: *«Множество M не является ловушкой для последовательности в том и только том случае, когда…»* (не используя слов «не» или «нет»).

Упражнение 161. Существует ли последовательность, для которой любой интервал является кормушкой? для которой любой интервал является ловушкой?

Упражнение 162. a) Доказать, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, который является её кормушкой. b) Доказать, что для всякой ограниченной монотонной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её ловушкой.

Упражнение 163. Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ такова, что $|x_{n+1}-x_n| \leqslant 1/2^n$ при всех n. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $|x_{n+1}-x_n| \leqslant 1/n$.

Упражнение 164. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Доказать, что в последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует наименьший член.

Упражнение 165. Пусть a_n — б.м.п. и $a_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $b_n = \frac{1}{a_n}$ — б.б.п.

Упражнение 166. Пусть a'_n и a''_n — б.м.п. Доказать, что a_n, где $a_n = a'_n - a''_n$ — тоже б.м.п. Другими словами, доказать, что разность двух б.м.п. есть б.м.п.

Упражнение 167. Доказать, что a_n, где $a_n = \sin n \cdot \sin \frac{2}{n}$ — б.м.п.

Упражнение 168. Последовательности $\alpha_n > 0$ и β_n — б.м.п. Всегда ли $\alpha_n^{\beta_n}$ — б.м.п.?

Упражнение 169. Последовательности $\alpha_n > 0$ и $\beta_n > 0$ — б.м.п. Всегда ли $\alpha_n^{1/|\beta_n|}$ — б.м.п.?

Упражнение 170. Доказать, что a_n, где $a_n = \sin^2 n \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{n}$ — б.м.п.

Упражнение 171. Последовательности $\alpha_n > 0$ и $\beta_n \neq 0$ — б.м.п. Всегда ли α_n^{1/β_n} — б.м.п.?

Упражнение 172. Доказать, что a_n, где $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$ — б.м.п..

Упражнение 173. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n-a}{x_n+a} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Упражнение 174. Пусть $a_n > 0$. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$.

Упражнение 175. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

Упражнение 176. Найти предел: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt{n}+2n-7}{n\sqrt{n}+5n+11}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n}+3^n}{5^{n-1}-8^{n+1}}$.

Упражнение 177. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Верно ли обратное утверждение?

Упражнение 178. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $a \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Упражнение 179. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a$, где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Упражнение 180. Найти предел последовательности $a_n = C_n^4 \cdot \frac{1}{n^4}$.

Упражнение 181. Пусть $a_n = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}$. Существует ли предел последовательности a_n? Ответ обосновать.

Упражнение 182. Пусть $a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$. Существует ли предел последовательности a_n? Ответ обосновать.

Упражнение 183. Найти предел: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{n}+2n-7}{n\sqrt{n}-5n^2\sqrt{n}+11}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^{2n}}{9^{n+1}-5^{n+1}}$.

Упражнение 184. Доказать, что последовательность $a_n = C_n^3 \cdot \frac{1}{n^3}$ имеет предел и найти его.

Упражнение 185. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Рассмотрим последовательность средних арифметических $A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Доказать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ существует и равен тому же числу a.

Упражнение 186. Пусть $\forall m, n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$. Доказать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

Упражнение 187. Сходится ли последовательность $a_n = \sin(2\pi e \cdot n!)$?

Упражнение 188. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}/n = 1/e$.

Упражнение 189. Дана последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в которой первые два члена равны 1, а каждый последующий равен сумме двух предыдущих (числа Фибоначчи). Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$.

Упражнение 190. Последовательность a_n составлена из положительных чисел. Доказать, что если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n = e'$ существует, то $e' > e$.

Упражнение 191. Найти a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/4)(1-1/9)\cdot\ldots\cdot(1-1/n^2)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

Упражнение 192. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\big((2+\sqrt{3})^n\pi\big)$.

Упражнение 193. Пусть $a_1 = x$, $a_{n+1} = (a_n+1)\cdot x$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Упражнение 194. Пусть $a_1 = \sqrt{x}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n\cdot x}$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Упражнение 195. Пусть $a_1 = \sqrt{x}$, $a_{n+1} = \sqrt{x+a_n}$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Упражнение 196. Пусть $a_1 = \log_2 3^x$, $a_{n+1} = \log_2 3^x + a_n$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

Упражнение 197. Пусть $a_1 = x+1$, $a_{n+1} = (x+1)^{a_n}$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

Упражнение 198. Пусть $a_1 = \sqrt{2+x}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+x\cdot a_n}$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 14$.

Упражнение 199. Пусть $a_1 = 3^{x/2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3^x + a_n}$. Решить уравнение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$.

Упражнение 200. Пусть $[a_n, b_n]$ — стягивающая система отрезков, $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Упражнение 201. Пусть $[a_n, b_n]$ — вложенная система отрезков, не являющаяся стягивающейся. Может ли их пересечение состоять ровно из одной точки?

Глава 7

Последовательности-2.

7.1 Теоремы Вейерштрасса и Больцано–Вейерштрасса

Теорема 22. (К. Вейерштрасс) *Предел монотонной ограниченной последовательности a_n существует и равен* $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ *(для возрастающей последовательности) или* $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ *(для убывающей последовательности).*

Доказательство.
Рассмотрим возрастающую последовательность a_n. Множество $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху и не пусто, следовательно существует $a_0 = \sup A$. Рассмотрим произвольную окрестность $U(a_0) = (b, c)$. Поскольку $b < a_0 = \sup A$, то существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что $a_N > b$. Из монотонности последовательности a_n вытекает, что $\forall n > N(a_n > a_N > b)$. С другой стороны $\forall n \in \mathbb{N}(a_n \leqslant \sup A < c)$. Таким образом, $\forall n > N(a_n \in (b, c) = U(a_0))$. Следовательно $U(a_0)$ есть ловушка a_n.

Рис. 7.1: Карл Вейерштрасс (1815-1897).

Лемма 7. *Пусть в последовательности a_n нет наименьшего элемента , т.е.* $\nexists\, n \in \mathbb{N}(a_n = \inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$. *Тогда существует монотонная подпоследовательность* $a_{n_1} > a_{n_2} > \ldots > a_{n_k} > \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$.

Доказательство.
Выберем $n_1 = 1$, тогда $a_{n_1} = a_1$. Пусть теперь уже выбраны $a_{n_1} > a_{n_2} > \ldots > a_{n_k}$, выберем $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$, так, чтобы

$nk + 1 > n_k$. Допустим такого члена последовательности не существует. Тогда $\forall n > n_k (a_n \geq a_{n_k})$. Следовательно, некоторый $a_{n_0} = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_k})$ является наименьшим членом последовательности a_n, что противоречит условию.

Лемма 8. *В любой последовательности a_n можно выделить монотонную подпоследовательность $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \geq a_{n_k} \geq \ldots$ или $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \ldots \leq a_{n_k} \leq \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$.*

Доказательство.
Пусть a_{n_1} — наименьший член последовательности a_n.

Если такого не существует, то по лемме 7 в a_n можно выбрать монотонную подпоследовательность.

Если он существует, то рассмотрим последовательность $\{a_k\}_{k=n_1}^{\infty}$.

Либо в ней нет наименьшего элемента — тогда по лемме 7 в $\{a_k\}_{k=n_1}^{\infty}$ можно выбрать монотонную подпоследовательность. Либо такой член существует — тогда возьмем его в качестве a_{n_2}.

Далее, на каждом шаге выбираем в последовательности $\{a_k\}_{k=n_s}^{\infty}$ наименьший член и берем его в качестве $a_{n_{s+1}}$. Этот процесс либо неограниченно продолжается, либо, в какой–то момент возникнет ситуация, описанная в лемме 7.

Таким образом, в любом случае, мы получим монотонную подпоследовательность.

Теорема 23. (Больцано–Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство.
Пусть последовательность a_n ограничена. Докажем, что она имеет предельную точку. Построим стягивающуюся систему отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

- Первый шаг. Последовательность a_n ограничена, т.е. $\exists m, M$, такие, что $m \leqslant a_n \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $u_1 = m$ и $v_1 = M$. Очевидно $[u_1, v_1]$ — кормушка последовательности a_n.

- На каждом следующем шаге. Пусть $c = \frac{u_n+v_n}{2}$ — середина отрезка $[u_n, v_n]$. Рассмотрим отрезки $[u_n, c]$ и $[c, v_n]$. По лемме 10 хотя бы один из них является кормушкой последовательности a_n. Допустим это отрезок $[u_n, c]$, тогда выберем $u_{n+1} = u_n, v_{n+1} = c$ (в противном случае $u_{n+1} = c, n_{n+1} = v_n$)

Очевидно, система отрезков $\{[u_n, v_n]\}_{n=1}^{\infty}$ будет стягивающейся (доказывается так же, как в доказательстве теоремы 29). Тогда их пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [u_n, v_n] = \{a_0\}$. Докажем, что a_0 — предельная точка последовательности a_n. Действительно, рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Очевидно, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|v_n - u_n| < \varepsilon$, а значит $[u_n, v_n] \subset U_\varepsilon(a_0)$. Но $[u_n, v_n]$ — кормушка последовательности a_n, следовательно $U_\varepsilon(a_0)$ — тоже кормушка ($\varepsilon > 0$ — произвольное!). Следовательно a_0 — предельная точка последовательности a_n. Тогда по лемме 9 существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, предел которой равен a_0. Теорема доказана.

Другое доказательство теоремы Больцано–Вейерштрасса вытекает из теоремы Вейерштрасса и леммы 7. На экзамене разрешается приводить любое из них, при условии, что учащийся умеет доказывать *все* вспомогательные утверждения.

7.1.1 Итерационная формула Герона

Теорема 24. (итерационная формула Герона) *Пусть a — произвольное положительное число. Выберем $u_0 > 0$ произвольно, а члены последовательности u_n получим из рекуррентного соотношения*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$.

Доказательство.

- Последовательность u_n ограничена снизу величиной $\sqrt{a}$. Действительно,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} > 0.$$

- Последовательность u_n убывает. Действительно

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = \frac{u_n^2 - a}{2u_n},$$

что больше 0 по предыдущему пункту.

- По теореме Вейерштрасса последовательность u_n имеет предел. Предположим, он равен u и рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

— предел последовательности, «сдвинутой» на 1 член. По свойствам пределов он равен $\frac{1}{2}(u + \frac{a}{u})$. Значит u удовлетворяет уравнению $u = \frac{1}{2}(u + \frac{a}{u})$. Решая его, получим $u = \pm\sqrt{a}$. Корень $u = -\sqrt{a}$ надо отбросить, поскольку все члены последовательности u_n положительны, а значит предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ не может быть отрицательным (см. утверждение 19).

В итоге получим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$, что и требовалось доказать.

Пример 24. *Попробуем найти* $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\ldots$ *таким способом. Возьмем* $a = 2$, *и* $u_0 = 1$ *— начальное приближение. Тогда* $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = 1{,}416\,666\,666\,666\,666$; $u_3 = 1{,}414\,215\,686\,274\,509$; $u_4 = 1{,}414\,213\,562\,374\,689$; $u_5 = 1{,}414\,213\,562\,373\,094$. *Уже на пятом шаге вычислений погрешность не превосходит* 10^{-15}*!*

7.1.2 Теорема Штольца

Будем обозначать $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$. Если a_0 не задано, то считаем, что $a_0 = 0$.

Теорема 25 (Теорема Штольца)**.** *Пусть последовательность положительных чисел* x_n *монотонно возрастает и стремится к бесконечности (т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*). Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = A$, *то существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = A$.

Доказательство.
Обозначим $\alpha_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - A$, эта последовательность — б.м.п. по условию. Запишем $\Delta y_i = A\Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i$.

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta y_i = y_n$, то просуммировав по i от 1 до n, получим $y_n = Ax_n + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$. Обозначим $q_n = \frac{y_n}{x_n} - - A = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_n}$ и покажем, что эта последовательность — б.м.п.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем n_ε, так, чтобы неравенство $|\alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ было выполнено при всех $i > n_\varepsilon$. Разобьем сумму на две $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_n} = \sum\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_n} + \sum\limits_{i=n_\varepsilon+1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_n} = = S_1 + S_2$. Поскольку $x_n \to +\infty$, то, выбрав достаточно большое $n > N_\varepsilon$, получим

$$|S_1| = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} \alpha_i \Delta x_i\right|}{x_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны $|S_2| \leqslant \sum\limits_{i=n_\varepsilon+1}^{n} |\alpha_i| \cdot \frac{\Delta x_i}{x_n} \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{i=n_\varepsilon+1}^{n} \Delta x_i}{x_n} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x_n - x_{n_\varepsilon}}{x_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (тут мы используем то, что $|\Delta x_i| = \Delta x_i$, поскольку последовательность возрастает).

Следовательно, $|q_n| < \varepsilon$ при $n > \max(n_\varepsilon, N_\varepsilon)$. Из произвольности ε вытекает, что q_n — б.м.п.

Замечание. Не обязательно требовать, чтобы все x_n были положительны. Действительно, если последовательность стремится к бесконечности, то ее члены будут положительны, начиная с некоторого номера. Так что можно взять эту подпоследовательность и применить к ней теорему Штольца.

Пример 25. *Предположим мы хотим найти площадь криволинейного треугольника, образованного параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$ и $y = 0$. Разобьем его на n вертикальных полосок и заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} < < S < \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$. Устремим теперь $n \to \infty$ и найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ по теореме Штольца. Возь-*

мем $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2$, $x_n = n^3$, *тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3-(n-1)^3} = \frac{1}{3}$. *Несложно показать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ *тоже равен* $\frac{1}{3}$, *следовательно,* $S = \frac{1}{3}$.

7.2 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.*

Определение 70. Последовательность a_n называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторое число $c = c_e$, такое, что $U_\varepsilon(c)$ является ловушкой a_n. Другими словами, фундаментальной называется последовательность, имеющая ловушки сколь угодно малого размера.

Более известным является другое определение фундаментальной последовательности. Его как раз обычно и помещают в учебники

Определение 71. Последовательность a_n называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторое $N \in \mathbb{N}$, такое, что $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$ при любых $n', n'' > N$.

Утверждение 32. *Определения 70 и 71 эквивалентны.*

Доказательство.
Пусть a_n является фундаментальной в смысле определения 70. Тогда найдется $U_{\varepsilon/2}(c) = (c - \frac{\varepsilon}{2}; c + \frac{\varepsilon}{2})$ — ее ловушка. Это означает, что начиная с некоторого номера N все члены последовательности попадают в интервал $(c - \frac{\varepsilon}{2}; c + \frac{\varepsilon}{2})$, а значит их разность меньше ε. Следовательно a_n является фундаментальной в смысле определения 71.

Пусть a_n является фундаментальной в смысле определения 71. Тогда найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что $\forall n', n'' > N(|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$. Тогда $U_\varepsilon(a_{N+1})$ — ловушка,

7.2.1 Критерий Коши для последовательностей

Теорема 26 (Критерий Коши)**.** *Последовательность a_n имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство.
В одну сторону доказательство тривиально. Действительно, пусть существует $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(A)$ является ловушкой a_n.
В обратную сторону, пусть a_n — фундаментальная. Тогда она ограничена, следовательно имеет некоторую предельную точку A. Найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n', n'' > N(|a_{n'} - a_{n''}| < \frac{\varepsilon}{2})$. Выберем $n_0 > N$ такое, что $a_{n_0} \in U_{\varepsilon/2}(A)$ (это можно сделать т.к. $U_{\varepsilon/2}(A)$ — кормушка). Тогда при всех $n > n_0$ выполнено

$$|A - a_n| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а значит $a_n \in U_\varepsilon(A)$. Но это как раз и означает, $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Заметим, что понятие фундаментальности можно вводить не только для числовых последовательностей, но для любых последовательностей объектов, для которых можно ввести понятие расстояния. Так, например, можно ввести определение фундаментальной последовательности точек на плоскости или в пространстве (подумайте, как?).

Способность любой фундаментальной последовательности иметь предел является весьма важным свойством множества действительных чисел. Действительно, для множества рациональных чисел это уже неверно — можно подобрать фундаментальную последовательность в $\mathbb{Q}$, не имеющую предела в $\mathbb{Q}$. Множества, для которых такое свойство имеет место, называют *полными.* Таким образом $\mathbb{R}$ полно, а $\mathbb{Q}$ — нет.

7.3 Число Эйлера

Рассмотрим следующую задачу: пусть некоторый банк выплачивает 100% годовых. Очевидно, что некто, положив 100 руб. через год будет иметь 200руб. на счету. Но это при условии, что проценты выплачиваются один раз в год. Если же каждые полгода выплачивается по 50% от текущей суммы, то к концу года некто будет иметь 100+50+75=225 руб. Если проценты выплачивать каждый квартал — то сумма будет $100\cdot(1+0,25)^4 = 244.14$, если проценты выплачиваются каждый день (так делается, например, на некоторых межбанковских биржах) то сумма будет $100 \cdot (1 + \frac{1}{365})^{365} = 271.46$. Возникает вопрос, к чему будет стремиться эта сумма, если устремить число отрезков к бесконечности.

Теорема 27. *Рассмотрим последовательности* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Система отрезков* $[a_n, b_n]$ *является вложенной.*

Доказательство.
Очевидно, $a_n < b_n$. Докажем, что $a_1 \le a_2 \le \le \ldots \le a_n \le \ldots$. Рассмотрим отношение соседних членов этой последовательности:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n.$$

Применив неравенство Бернулли, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n >$$

$$> \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} > 1.$$

Следовательно, $a_{n+1} > a_n$, при всех $n \ge 1$
а значит последовательность a_n является возрастающей.

Аналогично доказывается, что последовательность b_n является убывающей. Действительно,

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left((1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n >$$

$$> \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

Следовательно $b_n < b_{n-1}$.

Теорема 28. *Рассмотрим последовательности* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *и* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Система отрезков* $[a_n, b_n]$ *является стягивающейся.*

Доказательство.
По теореме 27 последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ является вложенной. Из этого вытекает, что все a_n и b_n не превосходят $b_1 = (1+1)^2 = 4$. Тогда длина n-го отрезка $|a_n - b_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{4}{n}$.
Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим $N = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$, тогда $\forall n > N(|a_n - b_n| \le \frac{4}{N} < \varepsilon)$, следовательно система $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ является стягивающейся.

Следствие 13. *Последовательность* $E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *сходится. Ее предел обозначается* e *и называется* **числом Эйлера**.

7.4 Подпоследовательности. Предел и частичный предел последовательности.*

Определение 72. Пусть задана последовательность a_n. Тогда **подпоследовательностью** называют бесконечное подмножество $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset a_n$. Будем считать, что индексы n_k упорядочены: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Тогда a_{n_k} называют k–м членом подпоследовательности.

Определение 73. Точка a_0 называется предельной точкой (частичным пределом) последовательности a_n если любая окрестность $U(a_0)$ является кормушкой последовательности a_n.

Определение 74. Точка a_0 называется пределом последовательности a_n если любая окрестность $U(a_0)$ является ловушкой последовательности a_n. В этом случае последовательность называется сходящей, а предел последовательности обозначается так: $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Утверждение 33. *Пусть* $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *и* $a'' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Тогда* $a' = a''$. *Другими словами у последовательности не может быть два разных предела.*

Лемма 9. *Множество A является кормушкой последовательности a_n тогда и только тогда, когда A является ловушкой некоторой подпоследовательности* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство.
Пусть A — кормушка последовательности a_n. Тогда найдется член $a_{n_1} \in A$. По определению кормушки $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} \in A$, затем $\exists n_3 > n_2 : a_{n_3} \in A$, и.т.д. В итоге, получим последовательность номеров $n_1 < < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, таких, что $a_{n_k} \in A$. Но это означает что A есть ловушка подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$.
В другую сторону, пусть A — ловушка подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$. Это означает, что $\forall k > K (a_{n_k} \in A)$. Но поскольку $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ то, очевидно, $n_k \geqslant k$. Пусть задано произвольное $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $k_0 = \max(N+1, K+1)$. Тогда $k_0 > K$ и, следовательно, $a_{n_{k_0}} \in A$, а с другой стороны $k_0 > N$. Поскольку $N \in \mathbb{N}$ произвольно, то это означает, что A — кормушка последовательности a_n.

Лемма 10. *Пусть $A = A' \cup A''$ кормушка последовательности a_n. Тогда хотя бы одно из множеств A' и A'' тоже является кормушкой этой последовательности.*

Доказательство.
Предположим обратное. Пусть ни A' ни A'' не являются кормушками последовательности a_n. Тогда найдутся номера N' и N'', такие, что $\forall n > N' (a_n \notin A')$ и $\forall n > N'' (a_n \notin \notin A'')$. Но тогда $a_n \notin A' \cup A'' = A$) при всех $n > \max(N', N'')$, что противоречит определению кормушки.

7.5 Открытые и замкнутые множества.*

Напомним определение открытого множества.

[1]Необязательный материал

Определение 75. Множество называют **открытым**, если любая точка входит в него вместе с некоторой окрестностью, т.е. $\forall a \in \in A\,\exists U(a) \subset A$.

Замечание. В данном определении слово окрестность можно заменить на ε-окрестность.

Определение 76. Множество называют замкнутым, если его дополнение открыто.

Пример 26. *Множество (0,1) — открытое, а [0,1] — замкнутое (подумайте, почему?).*

Определение 77. Граничной точкой множества называется точка, в каждой окрестности которой содержатся как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие, т.е. $\forall U(a)\, U(a) \cap A \neq \varnothing$; $U(a) \cap \overline{A} \neq \varnothing$.

Пример 27. *Множества (0,1) и [0,1] имеют граничные точки 0 и 1.*

Определение 78. Множество всех граничных точек некоторого множества называют его **границей** и обозначают ∂A.

Определение 79. Точка a называется **предельной точкой** множества A, если в каждой ее проколотой окрестности содержатся точки, принадлежащие множеству A, т.е. $\forall \overset{\circ}{U}(a)\ \overset{\circ}{U}(a) \cap A \neq \varnothing$. Множество всех предельных точек множества A обозначается $P(A)$.

Теорема 29. *Каждое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство.
Построим стягивающуюся систему отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

- Множество A ограничено, следовательно лежит на некотором отрезке $m \leq A \leq M$. Возьмем $a_1 = m$ и $b_1 = M$.

- Пусть $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ — середина отрезка $[a_1, b_1]$. Рассмотрим отрезки $[a_1, c]$ и $[c, b_1]$. Хотя бы на одном из них лежит бесконечное число точек множества A (иначе оно было бы конечным). Допустим это отрезок $[a_1, c]$ тогда выберем $a_2 = a_1, b_2 = c$ (в противном случае $a_2 = c, b_2 = b_1$)

- На каждом следующем шаге. Пусть $c = = \frac{a_n+b_n}{2}$ — середина отрезка $[a_n, b_n]$. Рассмотрим отрезки $[a_n, c]$ и $[c, b_n]$. Хотя бы на одном из них лежит бесконечное число точек множества A. Допустим это отрезок $[a_n, c]$ тогда выберем $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c$ (в противном случае выберем $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$)

Очевидно, система отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ будет вложенной. Докажем, что она стягивающаяся. Действительно, длина n−го отрезка равна $\frac{M-m}{2^{n-1}}$. По неравенству Бернулли $2^{n-1} > 1 + (n-1) \cdot 1 = n$, следовательно $\frac{M-m}{2^{n-1}} < \frac{1}{n}$. Выбрав $n = [\frac{M-m}{\varepsilon}]+1$, где квадратные скобки означают целую часть числа, получим $|b_n - a_n| = \frac{M-m}{2^{n-1}} < < \frac{M-m}{n} < \varepsilon$, откуда и вытекает, что система $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — стягивающаяся. По теореме 21 существует единственная точка пересечения c. Докажем, что она является предельно точкой множества A. Действительно, выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим проколотую ε–окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (c)$. Очевидно, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, а значит $[a_n, b_n] \subset \overset{\circ}{U}_\varepsilon (c)$. Тогда в $[a_n, b_n]$ содержится бесконечное число точек множества A, а значит в $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (c)$ — тоже. Это верно для любого $\varepsilon > 0$, а значит c — предельная точка множества A. Теорема доказана.

Упражнения

Упражнение 202. Может ли ограниченная последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена? (Наибольший (наименьший) член — тот, который является верхней (нижней) гранью.)

Упражнение 203. a) Доказать, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, который является её кормушкой. b) Доказать, что для всякой ограниченной монотонной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её ловушкой.

Упражнение 204. Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная (невозрастающая или неубывающая) бесконечная подпоследовательность.

Упражнение 205. Доказать, что у всякой последовательности длины n^2+1 существует монотонная подпоследовательность длины $n+1$, но у последовательности длины n^2 может не быть монотонной подпоследовательности длины $n+1$.

Упражнение 206. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая другая последовательность целых чисел является её подпоследовательностью?

Упражнение 207. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любое целое положительное число представимо в виде разности двух членов этой последовательности, причём единственным способом?

Упражнение 208. Последовательность $x_0, x_1, \ldots$ такова, что $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 1/2^n$ при всех n. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 1/n$.

Упражнение 209. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Доказать, что в последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует наименьший член.

Упражнение 210. Доказать, что последовательность a_n имеет предел и найти его,

a) $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (корень извлекается n раз); b) $a_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}$.

Упражнение 211. Доказать, что на числовой прямой полными являются те и только те множества, которые замкнуты.

Упражнение 212. Доказать, что предел последовательности всегда является ее предельной точкой.

Упражнение 213. Верно ли подобное утверждение для ловушки? Т.е. Пусть $A = A' \cup \cup A''$ — ловушка последовательности a_n. Следует ли из этого что хотя бы одно из множеств A' и A'' тоже является ловушкой этой последовательности?

Упражнение 214. Пусть A открыто. Доказать, что $A \cap \partial A = \varnothing$.

Упражнение 215. Пусть A — замкнуто. Доказать, что $\partial A \subset A$.

Упражнение 216. Доказать, что замкнутое множество содержит все свои предельные точки, т.е. если A — замкнуто, то $P(A) \subset \subset A$.

Упражнение 217. Доказать, что $P(A) \cup \cup A$ — замкнутое множество при любом A.

Упражнение 218. Доказать, что $\partial A \cup A$ — замкнутое множество при любом A.

Упражнение 219. Доказать, что $\partial A \cup A = = P(A) \cup A$ при любом A.

Упражнение 220. Доказать, что последовательность a_n имеет предел и найти его, a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$ (корень извлекается n раз); b) $a_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{3}}}}$.

Упражнение 221. a) Вася Петров предложил следующее определение предела: Число A называется пределом последовательности a_n если любое открытое множество, содержащее A является ловушкой этой последовательности. Эквивалентно ли это определение стандартному? Ответ обоснуйте. b) Петя Васечкин предложил другое определение: Число A называется пределом последовательности a_n если любое замкнутое множество, не содержащее A не является ловушкой этой последовательности. Эквивалентно ли это определение стандартному?

Глава 8

Ряды

В магазин заходит бесконечное число математиков. Первый просит килограмм картошки, второй — полкило, третий — 250 грамм ... «Понял» — говорит продавец и кладёт на прилавок два килограмма.

bash.org.ru

8.1 Основные определения и примеры

Для начала приведем один любопытный парадокс, связанный с бесконечными суммами.

Рассмотрим следующую бесконечную сумму: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$

Попробуем найти S, группируя слагаемые следующим образом: $S = (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0 + 0 + ... = 0$; ... или следующим: $S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - ... = 1 - 0 - 0 - ... = 1$.

Переставив местами соседние слагаемые, получаем еще одно значение S: $S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = -1$.

Наконец, можно заметить, что $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - S$. Решая получившееся уравнение получим[1] $S = \frac{1}{2}$.

Итак, действуя четырьмя разными способами, мы нашли четыре значения суммы S: $S = 0 = 1 = -1 = \frac{1}{2}$. Какое же значение имеет сумма S в действительности?

Определение 80. Пусть задана последовательность a_n. Выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называют **рядом**, составленным из этой последовательности.

Определение 81. Сумму $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ называют **частичной суммой** ряда.

[1] Что особенно странно, т.к. суммируются целые числа!

Определение 82. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд **сходится**, а число S называют его **суммой** и записывают так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. В противном случае, т.е. если предел не существует, говорят, что ряд **расходится**.

Определение 83. Сумму $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ называют **остатком** ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Утверждение 34. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то предел* $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = 0$.

Доказательство.
Предоставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема 30 (Необходимый признак сходимости ряда.). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = S$. Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right) = S - S = 0.$$

8.2 Примеры рядов

Теорема 31. *Пусть* b_n *— геометрическая прогрессия со знаменателем* $|q| < 1$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится и его сумма равна* $\frac{b_1}{1-q}$.

Доказательство.
Рассмотрим частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n = b_1 \cdot \frac{q^N-1}{q-1}$ по формуле для суммы конечной геометрической прогрессии. Взяв $\lim\limits_{N\to\infty}$ от обеих частей равенства, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \cdot \frac{\lim\limits_{N\to\infty} q^N - 1}{q-1}$. Учитывая условие $|q| < 1$, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \cdot \frac{-1}{q-1} = \frac{b_1}{1-q}$.

Замечание. Условие $|q| < 1$ необходимо для сходимости. Так, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - ...$ расходится, т.к. его частичные суммы равны то -1, то 0, т.е. не существует предела.

Определение 84. **Гармоническим** рядом называют ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Теорема 32. *Гармонический ряд расходится.*

Доказательство.
Рассмотрим частичную сумму $S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n}$ и сгруппируем слагаемые:

$$S_{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Рассмотрим $k-$ю скобку:

$$\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \geq \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S_{2^n} \geq 1 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1+n}{2}$. Таким образом, частичные суммы образуют б.б.п и поэтому не существует их предела.

Теорема 33. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *сходится.*

Доказательство.
Заметим, что $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ при $n > 1$. Следовательно $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1) \cdot n} < 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$. Таким образом, последовательность частичных сумм является ограниченной и возрастает. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, существует ее предел.

Теорема 34. *Ряд*[2] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *сходится.*

Доказательство.
Рассмотрим последовательность частичных сумм с нечетными номерами: S_1, S_3, ... S_{2k+1},... Заметим, что с одной стороны

$$S_{2k+1} = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + ... + \left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2k+1} < 0,$$

поскольку сумма чисел, стоящих в каждой из скобок отрицательна.

С другой стороны,

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) > S_{2k-1},$$

т.е. последовательность возрастает. Следовательно, существует предел нечетных сумм $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = A$.

Рассмотрим теперь суммы с четными номерами:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k+1} + \frac{1}{2k+1}) = A.$$

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$, т.е. ряд сходится.

[2] Ряд такого вида является примером ряда Лейбница

Верна более общая теорема

Теорема 35 (Признак Лейбница). *Пусть последовательность a_n состоит из положительных членов, монотонно невозрастает и стремится к нулю. Тогда знакопеременный ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ сходится.*

Доказательство.
Пусть S_n — частичные суммы ряда. Заметим, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства: $S_{2k} \leqslant S_{2k+2} \leqslant S_{2k+3} \leqslant S_{2k+1}$. Действительно, $S_{2k+2} = S_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} \geqslant S_{2k}$, $S_{2k+3} = S_{2k+2} + a_{2k+3} \geqslant S_{2k+2}$ и $S_{2k+1} = S_{2k+3} - a_{2k+3} + a_{2k+2} \geqslant S_{2k+3}$. Следовательно, последовательность отрезков $[S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \supset \ldots \supset [S_{2k}, S_{2k+1}] \supset \ldots$ является вложенной. Поскольку $S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, то последоваттельность является стягивающейся. По принципу стягивающихся отрезков существует единственная общая точка, которая является пределом частичных сумм, т.е. суммой ряда.

8.3 Признак Вейерштрасса.*

Теорема 36 (Критерий Коши для рядов). *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n, n' > N(|S_n - S_{n'}| < \varepsilon)$.*

Доказательство.
Очевидно следует из критерия Коши для последовательности частичных сумм.

Теорема 37 (Признак Вейерштрасса). *Пусть $\forall n \in \mathbb{N}(|b_n| \le a_n)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к некоторому числу S. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится к некоторому S' и $S' \le S$.*

Доказательство.
По критерию Коши для всех $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n, n' > N(|S_n - S_{n'}| < \varepsilon)$. Будем считать, что $n < n'$, тогда

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n'}| \le |b_{n+1}| + \ldots + |b_{n'}| \le a_{n+1} + \ldots + a_{n'} < \varepsilon.$$

Значит критерий Коши выполнен для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, следовательно, он сходится. А неравенство $S' \le S$ вытекает из аналогичного неравенства для частичных сумм.

8.4 Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Лемма 11. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *сходится.*

Доказательство.
Очевидно, что последовательность S_n монотонно возрастает. А из неравенства

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

следует ее ограниченность. Следовательно, по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

Теорема 38. *Сумма ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *равна* e *(Числу Эйлера).*

Доказательство.
Обозначим $e_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Рассмотрим последовательность

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n^n}.$$

Как известно (по следствию 13), предел этой последовательности существует и равен e. Несложно заметить, что $C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n!}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. следовательно $E_n \le S_n$, а значит, по лемме 19 (о предельном переходе в неравенствах) $e \le e_1$.

С другой стороны, выберем некоторое $\varepsilon > 0$ и некоторое k. В сумме $E_n = 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n^n}$ предел каждого из слагаемых при $n \to \infty$ равен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_n^l}{n^l} = \frac{1}{l!}$. Выберем $n > k$, так, чтобы неравенство $\frac{C_n^l}{n^l} > \frac{1}{l!} - \frac{\varepsilon}{k}$ выполнялось при всех $l = 1, \ldots, k$. Просуммировав неравенства, получаем, что

$$E_n = 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n^n} \ge 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \ldots + \frac{C_n^k}{n^k} \ge$$
$$\ge 1 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{\varepsilon}{k}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{\varepsilon}{k}\right) = S_k - \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ (заметим, что при этом $n \to \infty$ тоже), получаем $e \ge e_1 - \varepsilon$. Из доказанного ранее неравенства $e \le e_1$ и произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $e_1 = e$.

Теорема 39. *Число* e *иррационально.*

Доказательство.
Предположим обратное, пусть $e = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим разность

$$\Delta = e - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > 0.$$

Заметим, что поскольку, что $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!\cdot(n+1)^{k-n}}$, то

$$0 < \Delta = e - S_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n!\cdot(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n}{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}. \quad (8.4.1)$$

Заметим, что $n!\Delta = n!\left(\frac{m}{n} - 1 - \frac{1}{1!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right)$ — положительное целое число, но умножив 8.4.1 на $n!$, получим

$$0 < n!\Delta = n!(e - S_n) < n!\cdot\frac{1}{(n+1)!} < 1,$$

что приводит к противоречию.

Упражнения

Упражнение 222. Дайте определение расходящегося ряда не используя слов «не» и «нет».

Упражнение 223. Докажите, что ряд сходится и найдите его сумму: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

Упражнение 224. Докажите, что ряд сходится: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; c*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$; d**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}$.

Упражнение 225. Доказать, что ряд расходится:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n+1}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$.

Упражнение 226. Определите, сходится ли ряд: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n-1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$.

Упражнение 227. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Упражнение 228. а) Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Следует ли из этого, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ сходится? б) Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Следует ли из этого, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ расходится?

Упражнение 229. На столе лежит стопка книг (см. рис.).

На какое максимальное расстояние может выдаваться верхняя книжка по отношению к нижней? Можно считать длину книги равной 1, количество книг не ограничено.

Упражнение 230. Старик Хоттабыч решил построить башню из бесконечного количества кирпичей. Каждый из кирпичей имеет форму куба, первый кирпич имеет размер 1м, второй — 1/2 метра, третий — 1/3,... и т.д. а) Докажите, что высота башни бесконечна. b) Докажите, что если Волька ибн Алёша захочет покрасить ее в кразный цвет, то ему потребуется конечное количество краски.

Упражнение 231. Дан ряд Лейбница: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-1/2+1/3-1/4+\ldots$. а) Докажите, что ряд сходится и его сумма положительна. b) Переставьте члены ряда так, чтобы его сумма была отрицательной. c*) Переставьте члены ряда так, чтобы он стал расходящимся.

Глава 9

Действительные числа

Ранее рассматривались действительные числа как точки на числовой прямой. Теперь пришло время определить, что же такое действительно число.

Определение 85. Пусть $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$, последовательность, члены которой $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда десятичная запись $\overline{a_{-k}a_{-k+1}\ldots a_{-1}a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ задает положительное действительное число $a_{-k}\cdot 10^k + a_{-k+1}\cdot 10^{k-1} + \ldots +$ $+a_{-1}\cdot 10^1 + a_0\cdot 10^0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 10^{-n}$; а десятичная запись $-\overline{a_{-k}a_{-k+1}\ldots a_{-1}a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ задает отрицательное действительное число $-a_{-k}\cdot 10^k - a_{-k+1}\cdot 10^{k-1} - \ldots -$ $- a_{-1}\cdot 10^1 - a_0\cdot 10^0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 10^{-n}$.

Докажем корректность вышеприведенного определения. Для этого докажем, что ряд сходится и что любое число может быть представлено в виде десятичной записи.

Другое определение десятичных чисел.

Пусть $\mathbb{R}$ есть множество объектов для которых заданы отношение $\le$ и и операции $+$ и $\cdot$, удовлетворяющих аксиомам:

1. $\forall a, b(a + b = b + a)$ (Коммутативность сложения);
2. $\forall a, b, c\,(a + (b + c) = (a + b) + c)$ (Ассоциативность сложения);
3. $\exists!0(\forall a(a + 0 = 0 + a = a))$ (Существование нуля);
4. $\forall a(\exists! -a|a + (-a) = (-a) + a = 0)$ (Обратимость сложения);
5. $\forall a, b(a \cdot b = b \cdot a)$ (Коммутативность умножения);
6. $\forall a, b, c\,(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$ (Ассоциативность умножения);
7. $\exists!1 \ne 0|\forall a(1 \cdot a = a \cdot 1 = a)$ (Существование единицы);
8. $\forall a \ne 0\exists!a^{-1}|a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (Обратимость умножения);
9. $\forall a, b, c(a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ (Дистрибутивность умножения относительно сложения);
10. $\forall a(a \le a)$ (Симметричность сравнения);
11. Если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$ (Транзитивность сравнения);
12. $\forall a, b$ выполнено $a \le b$ или $b \le a$, причем оба сравнения выполнены только если $a = b$. (Сравнимость чисел);

13. Если $a \leq b$ и $0 \leq c$, то $a \cdot c \leq b \cdot c$ (Монотоннность операции умножения);
14. $\forall \alpha > 0 (\exists n \in \mathbb{N} \,|\, n \cdot \alpha > 1)$ (Аксиома Архимеда);
15. Пусть множества A, B таковы, что $\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$. Тогда существует число c такое, что $\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq c \leq b$ (Аксиома отделимости).

Аксиомы 1–4 означают, что $\mathbb{R}$ — группа по сложению, аксиомы 5-8, что $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — группа по умножению. Аксиомы 1–9 определяют поле. Аксиомы 10–12 вводят на $\mathbb{R}$ отношение линейного порядка. А последние 2 аксиомы как раз и определяют структуру множества действительных чисел. Так, например $\mathbb{Q}$ удовлетворяет всем аксиомам кроме последней. Можно привести пример множества, не удовлетворяющего аксиоме Архимеда (подумайте, как?). Можно было бы по примеру Евклида сначала выписать аксиомы, а потом уже доказать, что получающее множество есть множество всех действительных чисел. Резюмируя все вышесказанное, можно сказать, что существует по крайней мере три способа определения действительных чисел: 1) Геометрический способ (точки на числовой прямой); 2) Десятичная запись (последовательность целых чисел); 3) Аксиоматический способ (вышеприведенная система аксиом).

Очевидно, тут перечислены далеко не все возможные варианты определения множества действительных чисел. Например, можно было рассмотреть фундаментальные последовательности рациональных чисел и считать их действительными числами. Заметим только, что каждый подход имеет как свои достоинства, так и недостатки.

Часть III

Функции

Глава 10

Функции. Графики.

> Первый курс. Первая пара по мат. анализу в техническом вузе.
> *Преподаватель:*
> — Записываем тему: Действительная функция действительной переменной. Сюръективные, инъективные и биективные функции. Сложная и обратная функция.
> *Голос с задней парты:*
> — Я передумал. Заберите меня в армию...
>
> bash.org.ru

10.1 Общие свойства функций

Определение 86. **Функцией** $F : A \mapsto B$ называется некоторый закон, который ставит в соответствие некоторым элемента множества A один или несколько элементов множества B. Множество A называется **множеством отправления** функции F, B называется **множеством прибытия**.

Пример 28. *График дежурства по классу является примером функции. Каждому дню ставится в соответствие один или несколько дежурных. Некоторым дням (выходным) ставится в соответствие ноль дежурных.*

Пример 29. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x}$ *является примером функции. Каждому действительному числу x (кроме $x = 0$) ставится в соответствие действительное число.*

Пример 30. $f(n) = n \mod 3 = \begin{cases} 0, & n = 3k; \\ 1, & n = 3k+1; \\ 2, & n = 3k+2; \end{cases}$ *является примером функции. Каждому целому числу ставится в соответствие остаток от деления на 3.*

Замечание. Можно дать следующее строгое определение понятия функции используя только множества: Функцией называют произвольное множество $\mathcal{F} \subset A \times B$. Тогда, если $x \in A$, то множество значений функции на x есть $F(x) = \{y \in B \,|\, (x, y) \in \mathcal{F}\}$.

Определение 87. Однозначной функцией $F : A \mapsto B$ называется некоторый закон, ставящий в соответствие каждому элементу множества A не более одного элемента множества B. Более формально, однозначной функцией называют множество $\mathcal{F} \subset A \times B$, такое, что если $(x', y'), (x'', y'') \in \mathcal{F}$ и $y' = y''$, то $x' = x''$.

Замечание. В данном курсе рассматриваются только однозначные функции, хотя многозначные — не есть какая-то экзотика. Например, функция, ставящая в соответствие квадратному уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ его корни $X(a, b, c) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ принимает ноль, одно или два значения в зависимости от знака $D = b^2 - 4ac$. Поэтому везде в дальнейшем будем писать просто «функция», понимая под этим однозначную функцию.

Определение 88. Областью определения функции F (обозначается D_F) называется множество $D_F \subset A$, состоящее из всех x, для которых $F(x)$ определена. **Множеством значений** функции F (обозначается E_F) называется множество $E_F = \{F(x) \,:\, x \in D_F$.

Определение 89. Образом множества M при отображении F называется множество $F(M) = \{y = F(x) \,:\, x \in M\}$. **Прообразом** множества S при отображении F называется множество $F^{-1}(S) = \{x : F(x) \in S\}$.

Замечание. Если множество S состоит из одной точки, то фигурные скобки обычно опускают и пишут $F^{-1}(y)$ вместо $F^{-1}(\{y\})$.

Определение 90. Инъекцией называют функцию F, такую, что для любых $x', x'' \in D_F$ из $x' \neq x''$ следует $F(x') \neq F(x'')$. Другими словами, инъекция — функция, которая на разных аргументах принимает разные значения.

Определение 91. Сюръекцией называют функцию $F : A \to B$, такую, что для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $F(x) = y$. Другими словами, сюръекция — функция, которая принимает каждое значение из B.

Замечание. Инъекцию иногда называют «отображение в», а сюръекцию «отображение на».

Определение 92. Биекцией (или **взаимно однозначным отображением**) называют функцию $F : A \to B$, являющуюся инъекцией и сюръекцией одновременно.

Определение 93. Пусть функции $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow X$ таковы, что $D_f = X$, $D_g = Y$, причём для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполнены равенства $x = g(f(x))$ и $y = f(g(y))$. Тогда функция g называется **обратной** для f и обозначается f^{-1}.

Теорема 40. *Пусть $F : A \to B$ биекция, $D_F = A$. Тогда существует обратная $F^{-1} : B \to A$, которая тоже является биекцией.*

Доказательство.
Рассмотрим произвольное $y^* \in B$. Поскольку F — сюръекция, то существует $x \in A$, такое, что $F(x) = y^*$. Таких $x \in A$ не может быть два, т.к. F — инъекция. Тогда отображение F^{-1}, которое ставит в соответствие каждому y^* такое x^* будет обратным к F.

Докажем, что F^{-1} — биекция. Пусть $x_0 \in A$, тогда рассмотрим $y_0 = F(x_0)$, очевидно, что $F^{-1}(y_0) = x_0$, следовательно, F^{-1} — сюръекция. С другой стороны, если $F^{-1}(y_1) = F^{-1}(y_2) = x^*$, то $y_1 = F(x^*)$ и $y_2 = f(x^*)$, следовательно, F^{-1} — инъекция.

Замечание. Если G — обратная функция для F, то F — обратная для G.

Пример 31. *Функция $F : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ заданная как $F(1) = 4$, $F(2) = 2$, $F(3) = 1$, $F(4) = 3$ является биекцией. Обратная к ней $F^{-1} : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ определена как $F^{-1}(1) = 3$, $F^{-1}(2) = 2$, $F^{-1}(3) = 4$ и $F^{-1}(4) = 1$.*

Пример 32. *Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x + 1$ является биекцией. Обратная функция $F^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.*

Пример 33. *Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$ не является биекцией. Действительно, $F(x) = F(-x)$, следовательно F — не инъекция. Кроме того, $E_F = [0; +\infty) \neq \mathbb{R}$, следовательно F не является сюръекцией.*

Пример 34. *Функция $F : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $F(x) = x^2$ является биекцией. Обратная функция $F^{-1}(y) = \sqrt{y}$.*

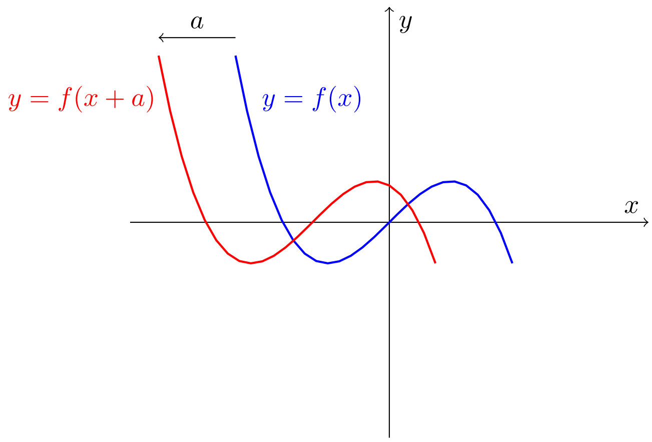
Определение 94. Пусть даны функции $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$. **Композицией** функций f и g (обозначается $g \circ f$) называется функция $h = g \circ f : X \to Z$, определенная на множестве $D_h = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ следующим образом: $h(x) = g(f(x))$.

10.2 Числовые функции

Определение 95. Числовой функцией называют функции $f(x)$, область определения и область значений которой являются подмножествами числовой прямой, т.е. $D_f, E_f \subset \mathbb{R}$. Другими словами, область отправления и прибытия числовой функции есть $\mathbb{R}$.

Замечание. Большая часть этого курса посвящена числовым функциям. Поэтому в дальнейшем под словом функция будем (если специально не оговорено) понимать числовая функция.

Определение 96. Числовая функция называется **четной**, если для всех $x \in D_f$ выполнено $(-x) \in D_f$ и $f(-x) = f(x)$. Числовая функция называется **нечетной**, если для всех $x \in D_f$ выполнено $(-x) \in D_f$ и $f(-x) = -f(x)$. Функции, которые не являются ни четными ни нечетными называют «функции общего вида».



Пример 35. *Функция* $f(x) = x^2 - 4x^4 + |x|$ — *четная,* $g(x) = x^3 - 3x|x|$ — *нечетная, а* $x^2 + x + 1$ — *общего вида.*

Определение 97. Функция $f(x)$ называется **периодической** если существует $T > 0$, такое, что:
1) $\forall x \in D_f (x \pm T \in D_f)$;
2) $\forall x \in D_f \left(f(x+T) = f(x)\right)$.
Число T называют **периодом** функции $f(x)$. Если $T_{\min}$ — период и для любого периода T выполнено $T_{\min} \le T$, то $T_{\min}$ называют **наименьшим (или главным) периодом** $f(x)$.

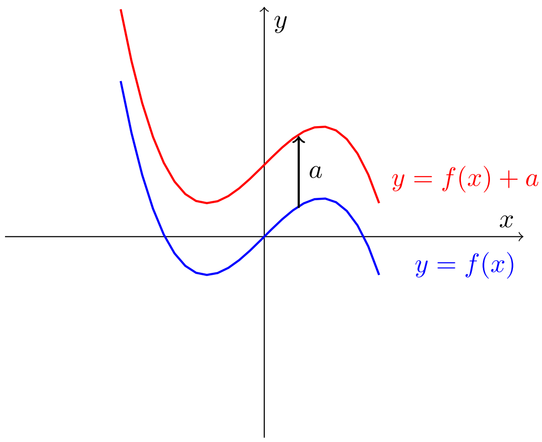
Пример 36. $\sin x$, $\cos x$ *имеют наимешьний период, равный* 2π, *а* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — π. *Функция* $\{x\}$ *(дробная часть) имеет период, равный 1.*

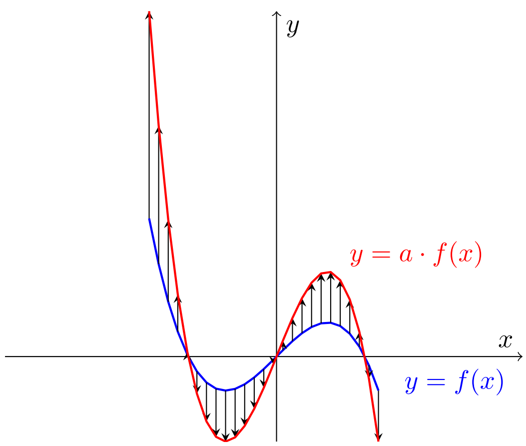
10.3 График функции. Преобразования графиков.

Определение 98. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости $\Gamma_f = \{(x, y = f(x)) \,|\, x \in D_f\}$.

Пусть задана некоторая $y = f(x)$.

1. График функции $y = f(x+a)$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом на a **влево** (вправо, если $a < 0$) — см. рис. 1.
2. График функции $y = f(x)+a$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом на a вверх (вниз, если $a < 0$) — см. рис. 2.
3. График функции $y = -f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox.
4. График функции $y = f(-x)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy.



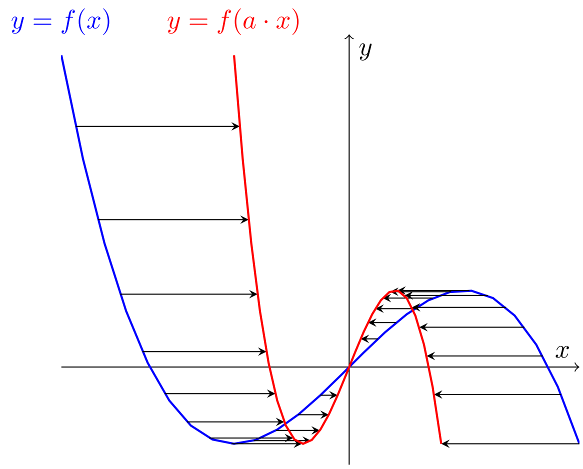


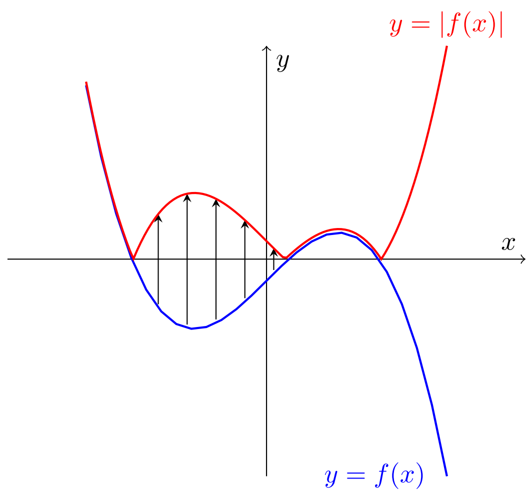
5. График функции $y = a \cdot f(x)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением в a раз по направлению оси Oy (сжатием, если $a < 1$) — см. рис. 5.

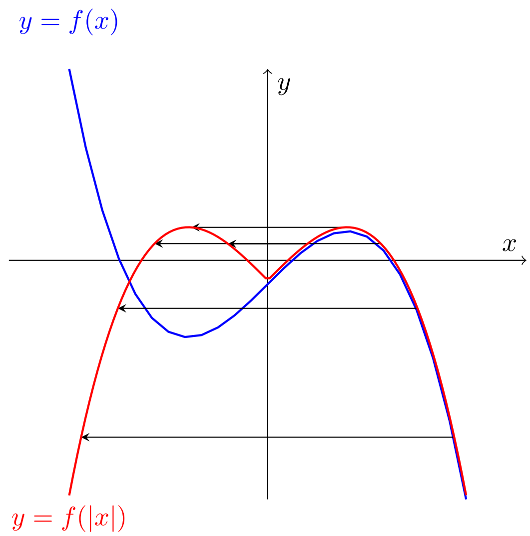
6. График функции $y = f(a \cdot x)$ получается из графика $y = f(x)$ **сжатием** в a раз по направлению оси Ox (растяжением, если $a < 1$) — см. рис. 6.

7. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox той части графика, которая расположена ниже этой оси — см. рис. 7.

8. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy той части графика, которая расположена правее этой оси, причем ту часть, что расположена левее оси следует отбросить — см. рис. 8.


$y = f(x)$
$y = f(a \cdot x)$
y
x

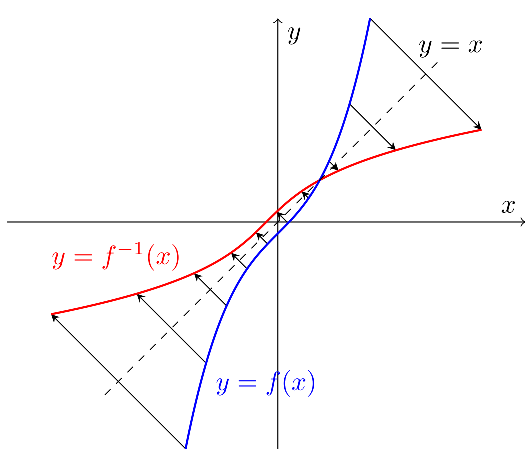

$y = |f(x)|$
y
x
$y = f(x)$



9. График функции $y=f^{-1}(x)$ получается из графика $y=f(x)$ отражением относительно прямой $y=x$ — см. рис. 9.

Теорема 41. *Пусть X и Y числовые множества и отображение $f : X \longrightarrow \longrightarrow Y$ имеет обратное. Тогда графики обратных отображений f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y=x$. Функция f нечётная тогда и только тогда, когда f^{-1} нечётная, f строго возрастает тогда и только тогда, когда f^{-1} строго возрастает, f строго убывает тогда и только тогда, когда f^{-1} строго убывает.*

Доказательство.
Точка $A(x_0,y_0)\in\Gamma_f$ тогда и только тогда, когда $B(y_0,x_0)\in\Gamma_{f^{-1}}$ согласно определению обратного отображения. Точка $C(\frac{x_0+y_0}{2},\frac{y_0+c_0}{2})$ — середина



отрезка $[AB]$. Пусть $(\cdot)$ $O(0;0)$ – начало координат. Очевидно $C \in \Gamma_{y=x}$, $|OA| = |OB| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Тогда если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $[OC]$ есть медиана и высота в равнобедренном треугольнике AOB. Значит, точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$. Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то они либо совпадают, либо все различны, и тогда из $y_0 = kx_0$, $x_0 = ky_0$, $x_0 \neq y_0$ следует, что $k = -1$. Так как прямые $y = x$ и $y = -x$ перпендикулярны, то и в этом случае точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$.

Далее, если f нечётная функция, то $(x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff (-x_0, -y_0) \in \Gamma_f$. Тогда имеем: $(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff (-x_0, -y_0) \in \Gamma_f \iff$ $\iff (-y_0, -x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$, то есть, $(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (-y_0, -x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Таким образом, f^{-1} нечётная функция. Значит, f нечётная функция $\iff$ f^{-1} нечётная функция.

Если f строго возрастает, то $x_1 < x_2 \iff y_1 < y_2$. Так как $(y_0, x_0) \in$ $\in \Gamma_{f^{-1}} \iff (x_0, y_0) \in \Gamma_f$, то и f^{-1} строго возрастает. Значит, f строго возрастает $\iff f^{-1}$ строго возрастает. Аналогично исследуется случай строгого убывания.

10.4 Примеры элементарных функций

.

- Функция $f(x) = C$, которая равна всюду некоторому фиксированному числу называется постоянной или константной функцией. Часто это факт записывают в форме $f \equiv const$. Графиком этой функции будет горизонтальная прямая.

- Линейная функция $y = kx + b$. Ее графиком является наклонная (т.е. не вертикальная) прямая, причем b — точка, в которой график пересекает ось Oy, а k — тангенс угла наклона (т.е. угла между прямой и осью Ox.

- Квадратичная функция (квадратный трехчлен) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

- Степенная функция $f(x) = x^n$. При четных степенях график имеет форму похожую на параболу, при нечетных — на кубическую параболу.

- Многочлен n-ой степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_0, ..., a_n$ — фиксированные числа $(a_n \neq 0)$, которые называют коэффициентами многочлена P_n.

- Обратная функция $f(x) = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — фиксированное число. Ее графиком является гипербола.

- Квадратный корень $f(x) = \sqrt{x}$ — функция, определенная при $x \geqslant 0$. По определению квадратный корень из x (арифметический) есть неотрицательное число, квадрат которого равен x, т.е. $(\sqrt{x})^2 = x$. Графиком этой функции является половина параболы, отраженная относительно прямой $y = x$. Аналогично определяются корни четной степени $f(x) = \sqrt[2n]{x}$. Их графики похожи на график $y = \sqrt{x}$

- Кубический корень $f(x) = \sqrt[3]{x}$ — функция, определенная на всей числовой оси. По определению кубический корень (алгебраический) есть число, куб которого равен x. Графиком является кубическая парабола, отраженная относительно прямой $y = x$. Аналогично определяются корни других нечетных степеней $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$. Их графики похожи на график $y = \sqrt[3]{x}$

Глава 11

Элементарные функции

Элементарные функции действительной переменной

11.0.1 Периодические функции

Определение 99. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **периодической**, если существует $\tau \neq 0$ такое, что для любого $x \in D_f$ выполнено

- $x \pm \tau \in D_f$
- $f(x + \tau) = f(x)$.

Число τ называется **периодом** функции f. Полагаем ноль периодом любой функции. Наименьший положительный период T называется **главным периодом**.

Лемма 12. *Если τ – период функции $f : \mathbb{R} \supset M \longrightarrow \mathbb{R}$, то для любого $m \in \mathbb{Z}$ $m\tau$ – тоже период f.*

Доказательство. Если $\tau = 0$ или $m = 0$, то утверждение, очевидно, верно. Пусть $\tau \neq 0$. В случае $m > 0$ приме́ним принцип математической индукции.
База индукции. $f(x + \tau) = f(x)$, что верно, так как τ - период f.
Шаг индукции. $f(x + (m+1)\tau) = f(x + m\tau + \tau) = f(x + m\tau) = f(x)$ по предположению индукции. Для $m < 0$ имеем $f(x+m\tau) = f(x+m\tau-m\tau) = f(x)$, так как $(-m) > 0$ и по доказанному $(-m\tau)$ – период f. □

Теорема 42. *Если T — главный период функции $f : \mathbb{R} \supset M \longrightarrow \mathbb{R}$, то $\{mT : m \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех периодов функции f.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех периодов функции f. По лемме 15, $\{mT : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{M}$. Пусть $\tau \in \mathfrak{M}$ — произвольный элемент из $\mathfrak{M}$, а $n = [\frac{\tau}{T}]$ — целая часть $[\frac{\tau}{T}]$. Тогда $n \leq \frac{\tau}{T} < n+1$, что равносильно $0 \leq \tau - nT < T$. Так как τ и $(-nT)$ – периоды f, то $f(x+\tau-nT) = f(x+\tau) = f(x)$, и таким образом $(\tau - nT)$ – тоже период f. Но T по условию – наименьший положительный период f. Поэтому из $0 \le \tau - nT < T$ следует, что $\tau = nT$. Значит, $\tau \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subset \{mT : m \in \mathbb{Z}\}$. Так как $\{mT : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subset \{mT : m \in \mathbb{Z}\}$, то $\mathfrak{M} = \{mT : m \in \mathbb{Z}\}$. □

11.1 Целая часть числа

Определение 100. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Целое число n такое, что $n \le x < n + 1$ называется **целой частью** x и обозначается $[x]$.

Существование целой части любого числа устанавливает следующая

Теорема 43. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $n \le x < n + 1$.*

Доказательство.

- **Существование.**Пусть $x > 0$. По аксиоме Архимеда найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что $N > x$. Следовательно $x \in (0, N) = (0, 1) \cup [1, 2) \cup \ldots \cup$ $\cup\, [N - 1, N)$. По определению объединения множеств $x \in [n, n + 1)$ для некоторого n. Доказательство этого факта для отрицательных x предоставляется читателю в качестве упражнения.
- **Единственность.** Двойное неравенство $n \leqslant x < n + 1$ равносильно тому, что $x = n + \alpha$, где $\alpha \in [0, 1)$. Если, кроме того, $x = m + \beta$, где $\beta \in [0, 1)$, то $0 \leqslant |m - n| = |\alpha - \beta| < 1$. Значит, если m и n целые, то $m = n$. □

Определение 101. Пусть $x \in \mathbb{R}$. **Дробной частью** числа x называют $\{x\} = x - [x]$.

Свойства целой и дробной части числа:

- $[x] \leqslant x < [x] + 1$ (следует из определения);
- $0 \leqslant \{x\} < 1$;
- Если $n \in \mathbb{Z}$, то $[x + n] = [x] + n$ и $\{x + n\} = \{x\}$.
- Если $\{x\} = \{y\}$, то $x - y \in \mathbb{Z}$.
- $[x + y] \geqslant [x] + [y]$;
- $[x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$;
- Если $n \in \mathbb{N}$, то $\{n\{x\}\} = \{nx\}$
- $\{x\}$ является периодической функцией, ее главный период равен 1.

Упражнение 232. Докажите эти свойства.

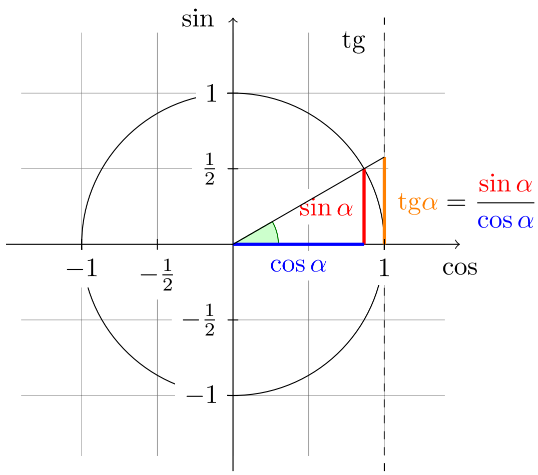


Рис. 11.1: Определение тригонометрических функций.

11.2 Тригонометрические функции. Определение, основные свойства.

Теорема 44. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *существует единственная пара* (α, n)*, где* $\alpha \in [0; 2\pi)$ $n \in \mathbb{Z}$ *такая, что* $x = \alpha + 2\pi n$.

Доказательство. Пусть $n = [\frac{x}{2\pi}]$ – целая часть $\frac{x}{2\pi}$. Тогда $n \leq \frac{x}{2\pi} < n+1$, что равносильно $0 \leq x - 2\pi n < 2\pi$. Полагая $\alpha = x - 2\pi n$, имеем утверждение теоремы. Существование и единственность следуют из существования и единственности целой части по теореме 53. Теорема доказана.

Определение 102. Рассмотрим в прямоугольной Декартовой системе координат на плоскости Oxy «единичную окружность» $x^2+y^2 = 1$ (см. Рис. 13.1). От оси абсцисс Ox «в положительном направлении», то есть против хода часовой стрелки, отложим угол xOz меры α радиан. Сторона Oz этого угла пересечёт единичную окружность в точке $M(x_0, y_0)$. По определению полагаем $\cos\alpha = x_0,\ \sin\alpha = y_0$. Если теперь x – произвольное действительное число, то по теореме 54 для x существует единственное представление $x = \alpha + 2\pi n$. Полагаем $\cos x = \cos\alpha,\ \sin x = \sin\alpha$,

$$\text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \text{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Определение 120 позволяет распространить понятие радианной меры угла (а также градусной меры ввиду линейности замены градусной меры на радианную) для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x \geq 0$ и $x = \alpha + 2\pi n$ – представление x, полученное по теореме 54. Полагаем, что угол меры x радиан получается откладыванием от оси абсцисс Ox n оборотов в положительном направлении (против хода часовой стрелки), и затем откладыванием в положительном направлении угла меры α радиан. Так как

$-x = -\alpha - 2\pi n = (2\pi - \alpha) - 2\pi(n+1)$ и углы α и $(2\pi - \alpha)$ дополнительные, то можно считать, что угол $(2\pi - \alpha)$ получается откладыванием угла α в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки), и, таким образом, угол $(-x) \leq 0$ получается откладыванием от оси абсцисс Ox n оборотов в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки), и затем откладыванием в том же отрицательном направлении угла меры α радиан.

Заметим, что $\sin x$ и $\cos x$ существуют для всех $x \in \mathbb{R}$, а $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ существуют не для всех $x \in \mathbb{R}$.

Тригонометрические функции определим следующим образом.

Определение 103.

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x;\quad \operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{tg} x;$$

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x;\quad \operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{ctg} x.$$

11.2.1 Свойства тригонометрических функций

Свойство 1. Синус и косинус – периодические функции с главным периодом $T = 2\pi$. Множество всех периодов этих функций есть $\{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Пусть $x = \alpha + 2\pi n$ – представление произвольного числа $x \in \mathbb{R}$, полученное по теореме 54. Тогда $x + 2\pi = \alpha + 2\pi(n+1)$ – представление $x + 2\pi$. Мы видим из определения 120, что $\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos\alpha$, $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin\alpha$. Значит, $T = 2\pi$ – период функций синус и косинус. На промежутке $[0; 2\pi)$ только для нуля $\cos 0 = 1$. Поэтому $T = 2\pi$ есть наименьший положительный период функции косинус, ведь если T', $0 \leq T' < T$, – период косинуса, то должно выполняться $\cos 0 = \cos T' = 1$, откуда следует, что $T' = 0$. На указанном промежутке только для двух точек, нуля и π, справедливо $\sin\pi = \sin 0 = 0$. Поэтому, если T', $0 \leq T' < T$, – период синуса, то должно выполняться $\sin 0 = \sin T' = 0$, следовательно, $T' = \pi$. Но тогда $1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$. Противоречие. Значит, $T' \neq \pi$. Значит, $T' = 0$. Итак, $T = 2\pi$ – главный период функции синус. Так как 2π есть главный период, то по теореме 55 множество $\{mT : m \in \mathbb{Z}\}$ есть множество всех периодов. $\square$

Свойство 2. Косинус — чётная функция, синус — нечётная функция.

Доказательство. Пусть $x = \alpha + 2\pi n$ – представление произвольного числа $x \in \mathbb{R}$, полученное по теореме 54. Тогда $(-x) = (2\pi - \alpha) + 2\pi(-n-1)$. Ввиду 2π-периодичности синуса и косинуса достаточно доказать $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, $\sin\alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$. Для $\alpha \in \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$ это утверждение, очевидно, верно. Пусть $\alpha \notin \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$. Углы α и $2\pi - \alpha$ дополнительные. Поэтому, из равенства по гипотенузе и острому углу соответствующих прямоугольных треугольников, на единичной («тригонометрической») окружности числу α соответствует некоторая точка $A(x_0, y_0)$, а числу $(2\pi - \alpha)$ соответствует точка $B(x_0, -y_0)$, взятые из определения 120. Это означает $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, $\sin\alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$, что и требовалось доказать.

Свойство 3. Область определения функций синус и косинус $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, область значений функций синус и косинус $E(\sin) = E(\cos) = [-1;1] \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно определениям 120 и 121, $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, $E(\sin) \subset [-1;1]$, $E(\cos) \subset [-1;1]$. Таким образом, достаточно доказать, что $[-1;1] \subset E(\sin)$, $[-1;1] \subset E(\cos)$. Пусть $d \in [-1;1]$. Тогда точки $A(d, \sqrt{1-d^2})$ и $B(\sqrt{1-d^2}, d)$ принадлежат единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$, так как их координаты удовлетворяют уравнению этой окружности. Пусть $\measuredangle xOA = \alpha$, $\measuredangle xOB = \beta$. Тогда $\cos\alpha = d$, $\sin\beta = d$. Свойство доказано.

Свойство 4. Тангенс и котангенс – нечётные периодические функции с главным периодом $T = \pi$. Область определения функции тангенс есть множество $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Область определения функции котангенс есть множество $\mathbb{R} \setminus \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Область значений этих функций есть вся числовая прямая.

Доказательство. Из свойств 5 и 6 для синуса и косинуса следует, что тангенс и котангенс нечётные 2π-периодические функции. В дальнейшем мы покажем, что их главный период равен π. Так как для произвольного $d \geq 0$ точка $(1;d)$ принадлежит прямой $y = \operatorname{tg}\varphi$ для некоторого φ, $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$, а точка $(1;-d)$ принадлежит прямой $y = -\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(-\varphi)$, то ввиду произвольности d имеем $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$. Аналогично устанавливается, что $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$. Так как на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ тангенс всюду определён, а на концах этого промежутка не определён, то ввиду π-периодичности тангенса заключаем, что $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Аналогично устанавливается, что $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

11.2.2 Тригонометрические тождества

Теорема 45. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Доказательство. 1) $x = \alpha + 2\pi n,\ y = \beta + 2\pi k,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi), n, k \in \mathbb{Z}$, – представления x и y. Далее, $\alpha \mapsto (\cdot)A(x_1, y_1),\ \beta \mapsto (\cdot)B(x_2, y_2)$ на тригонометрической окружности $x^2 + y^2 = 1$ в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости Oxy, $(\cdot)\ O(0,0)$ - начало координат, $x_1 = \cos x$, $y_1 = \sin x$, $x_2 = \cos y$, $y_2 = \sin y$. Ввиду чётности и периодичности косинуса имеем: $\cos(x-y) = \cos(\alpha - \beta + 2\pi(n-k)) = \cos|\alpha-\beta| = \cos(2\pi - |\alpha - \beta|) = \cos\varphi$, где $\varphi = \min\{|\alpha-\beta|, 2\pi - |\alpha-\beta|\} = \measuredangle AOB$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Надо доказать: $x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\varphi$.

2) Пусть $(\cdot)C(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})$ - середина отрезка $[AB]$, быть может, в случае $A = B$, вырожденного в точку. Имеем:

$$|OC|^2 = (\frac{x_1+x_2}{2})^2 + (\frac{y_1+y_2}{2})^2 = \\ = \frac{(x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) + 2(x_1x_2+y_1y_2)}{4} = \frac{1+1+2(x_1x_2+y_1y_2)}{4}.$$

Следовательно, $x_1x_2+y_1y_2 = 2|OC|^2-1$. Мы видим, что значение $x_1x_2+y_1y_2$ зависит только от меры угла $\measuredangle AOB$ и не зависит от взаимного расположения угла и системы координат, лишь бы вершина угла совпадала с началом координат. Рассмотрим угол $\measuredangle A_1OB_1$ такой, что $\measuredangle A_1OB_1 = \measuredangle AOB, = \varphi$, $A_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $B_1(1,0)$. Тогда $x_1x_2 + y_1y_2 = 1\cdot\cos\varphi + 0\cdot\sin\varphi = \cos\varphi$. Теорема доказана.

Лемма 13. *При любом $x \in \mathbb{R}$ выполнены тождества:*

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x.$$

Доказательство. По теореме 56 при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x.$$

Следовательно, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)) = \cos x.$ □

Теорема 46. *$\forall x, y \in \mathbb{R}$ справедливы следующие формулы:*

Формулы суммы. $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$ $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$ $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$ $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y.$
Формулы суммирования. $\sin x + \sin y = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}),$ $\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2}),$ $\cos x + \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}),$ $\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2}).$
Формулы разложения. $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$ $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)),$ $\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$

Формулы двойного и тройного аргумента.
Основное тригонометрическое тождество.
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Формулы приведения.
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$,
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$,
$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$,
$\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$,
$\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$, $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$,
$\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$, $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$,
$\sin(2\pi - x) = -\sin x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$,
$\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\cos(2\pi + x) = \cos x$.

Справедливы также следующие тождества:

Формулы приведения.
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$,
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x$,
$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$,
$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x$,
$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$,
$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x$,
$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$,
$\operatorname{tg}(2\pi + x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(2\pi + x) = \operatorname{ctg} x$.

Доказательство. По теореме 56, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ $\cos(x + y) = \cos(x - (-y)) = \cos x\cos(-y) + \sin x\sin(-y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ ввиду чётности косинуса и нечётности синуса. По доказанному и по лемме 16 имеем $\sin(x + y) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x + y)) = \cos((\frac{\pi}{2} - x) - y) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)\cos y + \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin y = \sin x\cos y + \cos x\sin y$. Далее, $\sin(x - y) = \sin(x + (-y)) = \sin x\cos(-y) + \cos x\sin(-y) = \sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$. Формулы суммы доказаны. По доказанному $\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2\cos x\cos y$, $\sin(x - y) + \sin(x + y) = 2\sin x\cos y$, $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2\sin x\sin y$, что доказывает формулы разложения. Если в формулах разложения произвести замену $\alpha = x - y,\ \beta = x + y$, то получатся формулы суммирования.

Согласно формуле косинуса разности $1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. По формуле синуса суммы $\sin 2x = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$, $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Аналогично при помощи формулы косинуса суммы доказывается формула косинуса тройного угла.

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются единообразно при помощи формул суммы, подобно тому как это было проделано для формулы $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ в лемме 16.

Формулы приведения для тангенса и котангенса доказываются единообразно при помощи формул приведения для синуса и косинуса. Например, $\operatorname{tg}(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\operatorname{tg}x$. Теорема доказана.

Замечание. Формулы приведения устанавливают π-периодичность тангенса и котангенса. Нетрудно видеть, что π есть главный период этих функций. Например, если T' — период тангенса и $0\le T'<\pi$, то $\operatorname{tg}0=0=\operatorname{tg}T'$. Следовательно $T'=0$.

Упражнение 233. Докажите следующие тождества[1]:

- $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
- $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
- $\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
- $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$
- $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$;
- $\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$;
- $\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}$;
- $\operatorname{ctg}(x-y)=\frac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}$;
- $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$;
- $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$,
- $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- $1+\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}$;
- $1+\operatorname{ctg}^2x=\frac{1}{\sin^2x}$, $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1$;
- $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$;
- $|\sin\frac{x}{2}|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$;
- $|\cos\frac{x}{2}|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

[1]Тождество есть равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных

Глава 12

Пределы функции.

12.1 Определение предела. Эквивалентность определений по Гейне и по Коши.

Определение 104. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и для любой последовательности $x_n \subset \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0)$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Тогда говорят, что функция f имеет в точке x_0 **предел**, равный A (или что функция $f(x)$ **стремится к** A при x стремящемся к x_0) и обозначают это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

В книгах по математическому анализу (например, в школьном учебнике) часто дается другое определение предела:

Определение 105. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $f(\overset{\circ}{U}_\delta (x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$ (т.е. для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta (x_0)$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$). Тогда говорят, что функция f имеет в точке x_0 предел, равный A (или что функция $f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0) и обозначают это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Определение 104 называют определением предела **по Гейне**, определение 105 — определением предела **по Коши.** Докажем равносильность этих определений:

Доказательство.

Пусть предел $\overset{\text{(Гейне)}}{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = A$ в смысле определения 104 (по Гейне). Докажем, что такое же равенство верно в смысле определения 105 (по Коши).

Будем доказывать методом от противного. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\delta > 0$ выполнено $f(\overset{\circ}{U}_\delta (x_0)) \not\subset U_\varepsilon(A)$. Возьмем $\delta_m = \frac{1}{m}$ и выберем $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_m} (x_0)$ так, что $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$. Тогда при всех m

окрестность $\overset{\circ}{U}_{1/m}(x_0)$ является ловушкой x_n, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Рассмотрим окрестность $U_\varepsilon(A)$, очевидно, она не является ловушкой $f(x_n)$ (ни один член последовательности $f(x_n)$ не попадает в нее), следовательно $\overset{\text{(Гейне)}}{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x_n) \neq A$ (по Гейне) — получено противоречие, что и доказывает требуемое утверждение.

Докажем в другую сторону. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения 105 (по–Коши). Выберем произвольную последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\forall n \in \mathbb{N}(x_n \neq x_0)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. По определению предела $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ будет ловушкой x_n, следовательно $f(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A)$ — ловушка $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (по Гейне).

12.2 Пределы на бесконечности и односторонние пределы.

Определение 106. Будем говорить, что предел последовательности равен плюс бесконечности и обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $(c, +\infty)$ является ее ловушкой. Аналогично, будем говорить, что предел последовательности равен минус бесконечности и обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $(-\infty, c)$ является ее ловушкой; будем говорить, что предел последовательности равен бесконечности и обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $(-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$ является ее ловушкой.

Определение 107. Будем говорить, что предел последовательности равен $a + 0$ и обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a + 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $[a, a + \varepsilon)$ является ее ловушкой. Аналогично, будем говорить, что предел последовательности равен $a - 0$ и обозначать $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a - 0$ если для любого $\varepsilon > 0$ множество $(a - \varepsilon, a]$ является ее ловушкой.

Замечание. Важно понимать, что ни бесконечность $(\pm\infty)$, ни $a \pm 0$ **не являются** действительными числами, следовательно, с ними нельзя производить арифметические операции. Это просто общепринятое формальное обозначение, которое используется для сокращения записи.

Определение 108. Будем обозначать $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{a \pm 0 | a \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty, \pm\infty\}$ — расширенное множество действительных чисел. Расширим определение предела по-Гейне. Числа вида $\{a \pm 0 | a \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty, \pm\infty\}$ будем называть **псевдочислами**. Пусть $a, A \in \hat{\mathbb{R}}$. Будем обозначать $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $x_n \neq a$ при всех $n \in \mathbb{N}$, выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Замечание. Аналогично можно расширить определение предела по–Коши, если определить ε–окрестности для псевдочисел следующим образом:

- $U_\varepsilon(\infty) = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(\infty) = (-\infty, \frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$;
- $U_\varepsilon(+\infty) = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$;
- $U_\varepsilon(-\infty) = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, \frac{1}{\varepsilon})$;
- $U_\varepsilon(a+0) = [a, a+\varepsilon)$, $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a+0) = (a, a+\varepsilon)$;
- $U_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon, a]$, $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon, a)$;

12.3 Арифметические свойства пределов

Утверждение 35. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = F$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G$*, тогда*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x) = F + G.$$

Утверждение 36. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = F$ *тогда*

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot F.$$

Утверждение 37. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = F$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G$*, тогда*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x) = F \cdot G.$$

Утверждение 38. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = F$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G \neq 0$*, тогда*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}.$$

Все эти свойства вытекают из соответствующих свойств пределов последовательности. Надо только сделать замечание в последнем свойстве, что если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G \neq 0$, то взяв $\varepsilon = |G|/2$, и соответствующее $\delta > 0$, получим $0 \notin f(U_\delta(x_0))$, или, другими словами, в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ не обращается в ноль.

Утверждение 39 (Предельный переход в неравенствах для функций)**.** *Пусть существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$*, причем функция* $f(x)$ *такова, что* $f(x) \leq C$ *для всех* $x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$*. Тогда* $A \leq C$*.*

Доказательство.
Вытекает из теоремы о предельном переходе для последовательностей.

Утверждение 40 (Теорема о двух милиционерах для функций)**.** *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = F$ *и в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$ *точки* x_0 *выполняются неравенства*

$$f_1(x) \le g(x) \le f_2(x),$$

тогда предел $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *существует и тоже равен* F*.*

Доказательство.
Вытекает из теоремы о двух милиционерах для последовательностей.

12.3.1 Асимптотические обозначения

Определение 109 (Асимптотические обозначения)**.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ и $g(x) \ne$ $\ne 0$ в этой окрестности. Говорят, что $f(x)$ есть **о большое** от $g(x)$ при x стремящемся к x_0 и обозначают $f(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))(x \to x_0)$, если функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в некоторой $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$. Говорят, что $f(x)$ есть **о малое** от $g(x)$ при x стремящемся к x_0 и обозначают $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))(x \to x_0)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ **эквивалентны** при x стремящемся к x_0 и обозначают $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

12.3.2 Основные свойства.

1. Если $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))(x \to x_0)$, то $f(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))(x \to x_0)$.
2. Если $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$, то $f(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))(x \to x_0)$.
3. Если $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))(x \to x_0)$, то $g(x) \pm f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$.
4. Если $f(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))(x \to x_0)$, то $f(x) \pm g(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))(x \to x_0)$.
5. Если $f(x) = \underline{\underline{O}}(g(x))(x \to x_0)$ и $f_1(x) = \underline{\underline{O}}(g_1(x))(x \to x_0)$, то $f(x)\cdot f_1(x) =$ $= \underline{\underline{O}}(g(x) \cdot g_1(x))(x \to x_0)$.
6. Если $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))(x \to x_0)$ и $f_1(x) = \overline{\overline{o}}(g_1(x))(x \to x_0)$, то $f(x)\cdot f_1(x) =$ $= \overline{\overline{o}}(g(x) \cdot g_1(x))(x \to x_0)$.
7. Если $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))(x \to x_0)$ и $f_1(x) = \underline{\underline{O}}(g_1(x))(x \to x_0)$, то $f(x)\cdot f_1(x) =$ $= \overline{\overline{o}}(g(x) \cdot g_1(x))(x \to x_0)$.
8. Если $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$ и $f_1(x) \sim g_1(x)(x \to x_0)$, то $f(x) \cdot f_1(x) \sim$ $\sim g(x) \cdot g_1(x)(x \to x_0)$.
9. Если $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$ и $f_1(x) \sim g_1(x)(x \to x_0)$, $f_1(x), g_1(x) \ne 0$, то $\frac{f(x)}{f_1(x)} \sim \frac{g(x)}{g_1(x)}(x \to x_0)$.

12.4 Непрерывные функции. Основные свойства.

Непрерывной называется функция, график которой можно нарисовать одним движением руки

Приписывается И. Ньютону

Определение 110. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x_0 \in$ $\in D_f$ если ее предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Определение 111. Функция, не являющаяся непрерывной в некоторой точке называется **разрывной** в этой точке. Если при этом существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, то говорят, что $f(x)$ имеет **разрыв I рода** в точке a, иначе — **разрыв II рода**.

Пример 37. *Функция $f(x) = x^2$ непрерывна во всех точках $x \in \mathbb{R}$. Это следует из того, что предел произведения равен произведению пределов.*

Пример 38. *Функция* $\mathrm{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ *является разрывной в точке $x = 0$ (разрыв I рода) и непрерывной в остальных точках.*

Пример 39. *Функция* $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ *является разрывной в точке $x = 0$ (разрыв II рода) и непрерывной в остальных точках.*

Определение 112. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в точке $x_0 \in D_f$ если ее предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в точке $x_0 \in D_f$ если ее предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существует и равен $f(x_0)$.

Определение 113. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на открытом множестве** M, если она непрерывна во всех его точках. Множество функций, непрерывных на множестве M обозначают $\mathcal{C}(M)$.

Определение 114. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если она непрерывна точках интервала (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b. Множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ обозначают $\mathcal{C}([a, b])$.

Замечание. Свойство непрерывности имеет вполне понятный графический смысл — график непрерывной функции есть непрерывная линия, т.е. его можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги. Большинство (но не все!) функций, с которыми мы будем иметь дело — непрерывные.

Теорема 47. *Пусть функции f, g непрерывны на множестве M, тогда:*

1. *Их сумма и разность $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ тоже непрерывны на множестве M*

2. *Их произведение $f(x)g(x)$ непрерывно на множестве M*

3. *Если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in M$, то $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(M)$.*

Доказательство.
Следует из соответствующих арифметических свойств пределов.

Следствие 14. *Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.*

Теорема 48 (Непрерывность сложной функции)**.** *Если $f \in \mathcal{C}(M)$ и $g \in \in \mathcal{C}(M_1)$, где $M_1 = f(M)$ — образ множества M, то $g \circ f(x) = g(f(x)) \in \in \mathcal{C}(M)$.*

Доказательство.
Рассмотрим произвольную $x_n \subset D_{g\circ f}$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in M$. Из непрерывности $f(x)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 = f(x_0)$. А из непрерывности $g(x)$ вытекает $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0) = z_0$.

Лемма 14. *Пусть $f \in \mathcal{C}(\{x_0\})$, тогда найдутся M и $\delta > 0$, такие что $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in U_\delta(x_0)$. Другими словами, функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство.
Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда существует $\delta > 0$, такое, что $f(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)) \subset U_1(f(x_0))$. Выбрав $M = |f(x_0)| + 1$ получим $\forall x \in U_\delta(x_0)(|f(x)| \leqslant M)$.

Теорема 49. *[Об ограниченности функции, непрерывной на отрезке] Пусть $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Тогда существует M и m, такие, что для любого $x \in [a,b]$ выполнены неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Другими словами, функция, непрерывная на отрезке является ограниченной на этом отрезке.*

Доказательство.
Докажем ограниченность сверху методом от противного. (ограниченность снизу доказывается аналогично). Предположим обратное, т.е. то, что для любого M найдется $x \in [a,b]$ такое, что $f(x) > M$. Выберем x_n, так, что $\forall m \in \mathbb{N}(f(x_m) > m)$. По теореме Больцано–Вейерштрасса (23) существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = x_0$. По лемме 14 найдутся M и $\delta > 0$, такие что $\forall x \in U_\delta(x_0)(|f(x)| \leq M)$, но $U_\delta(x_0)$ — ловушка последовательности $\{x_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$, а значит найдется $x_{m_n} \in \in U_\delta(x_0)$, такое, что $f(x_{m_n}) > M$. Противоречие.

Теорема 50 (Об экстремальных значениях непрерывной функции)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{C}([a,b])$. *Тогда существует* $x_{\max} \in [a,b]$ *и* $x_{\min} \in [a,b]$, *такие, что для любого* $x \in [a,b]$ *выполнены неравенства* $f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max})$. *Другими словами, функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего максимума (минимума).*

Доказательство.
Из ограниченности f на отрезке $[a,b]$, очевидно, вытекает ограниченность множества $f([a,b])$. Следовательно, существует $M = \sup f([a,b])$. Выберем последовательность $x_n \in [a,b]$ так, чтобы $f(x_n) \in U_{1/n}(M)$. Такие x_n существуют, поскольку $f([a,b]) \cap U_{1/n}(M) \neq \varnothing$ по определению точной верхней грани. Несложно заметить, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Все члены последовательности $x_n \in [a,b]$, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса из x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Рассмотрим $f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

Теорема 51 (Больцано–Коши)**.** *Пусть* $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$, *причем* $f(a) < 0$ *и* $f(b) > 0$. *Тогда существует* $x \in [a,b]$ *(возможно, не единственное), такое, что* $f(x) = 0$.

Доказательство.
Построим стягивающуюся систему отрезков $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

- Выбираем на первом шаге $a_1 = a$ и $b_1 = b$.
- На n–м шаге рассмотрим $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Есть три варианта. а)Если $f(c_n) = 0$ то теорема доказана. б) Если $f(c_n) > 0$, то выберем $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$; в) Если $f(c_n) < 0$, то $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$. Таким образом, на каждом шаге $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$.

Очевидно, построенная таким образом система отрезков является вложенной и стягивающейся.

Пусть $x_0 = \bigcap\limits_n [a_n,b_n]$, докажем, что $f(x_0) = 0$. Предположим, что $f(x_0) = d > 0$. Функция f непрерывна, следовательно $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = d > 0,$$

что противоречит теореме 19 (о предельном переходе в неравенствах) так, как $\forall n \in \mathbb{N}(f(a_n) < 0)$. Аналогично доказывается, что невозможен случай $f(x_0) < 0$. Следовательно, $f(x_0) = 0$.

Следствие 15 (Теорема о промежуточном значении.)**.** *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и* $f(a) < f(b)$. *Тогда для любого* $C \in [f(a); f(b)]$ *найдется* $\xi \in [a,b]$ *(возможно, не единственное), такое, что* $f(\xi) = C$.

Следствие 16. *Пусть f — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, $f([a,b]) = \{y = f(x) \mid x \in [a,b]\}$ — множество ее значений на отрезке. Тогда*

$$f([a,b]) = [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)].$$

Т.е. множество значений непрерывной на отрезке функции образует отрезок.

Доказательство.
Очевидно, $f([a,b]) \subset [\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$ (существование $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ гарантирует теорема 50). Пусть $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$, $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$, выберем произвольное $y_0 \in [m, M]$. Функция $g(x) = f(x) - y_0$ такова, что $g(x_{\min}) \le 0$ и $g(x_{\max}) \ge 0$, следовательно, по теореме 51 найдется $x_0 \in [a,b]$ такой, что $g(x_0) = 0$, а значит $f(x_0) = y_0$, т.е. $y_0 \in f([a,b])$.

12.5 Примеры непрерывных и разрывных функций.

Пример 40. *Функция $f(x) = c$ (константа) непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c = f(x_0)$.*

Пример 41. *Функция $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 = f(x_0)$.*

Пример 42. *Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — непрерывен на $\mathbb{R}$. Это вытекает из предыдущих двух примеров и теоремы 47.*

Пример 43. *Рациональная функция $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$ — непрерывна во всех точках, в которых $Q(x) \neq 0$. Это вытекает из предыдущего примера и теоремы 47.*

Пример 44. *Функции[1] $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ — непрерывны на $\mathbb{R}$.*

Доказательство.
Докажем для $f(x) = \sin x$ (для $\cos x$ доказательство аналогично). Рассмотрим произвольную последовательность $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Для нее

$$|\sin x_n - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{1}{2}(x_n - x_0)\cdot\cos\frac{1}{2}(x_n + x_0)\right| \le 2\left|\sin\frac{1}{2}(x_n - x_0)\right|.$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$, выберем N, так, что при

$$\forall n > N\left(|x_n - x_0| < \arcsin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right),$$

[1] Читатели, незнакомые с тригонометрическими функциями могут пропустить этот пример.

тогда $\sin|x_n - x_0| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (из монотонности синуса), а, следовательно, $|\sin x_n - - \sin x_0| < \varepsilon$.

Пример 45. *Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Это следует из непрерывности функций $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ и теоремы 47.*

Пример 46. *Функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на каждом из интервалов $(\pi n, \pi + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Это следует из непрерывности функций $f(x) = = \sin x$, $f(x) = \cos x$ и теоремы 47.*

Пример 47. Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *— функция, принимающая значение 1, если аргумент рационален, и 0, если аргумент иррационален. Так как в любой окрестности любой точки вещественной прямой содержатся как рациональные, так и иррациональные числа (а значит, как нули, так и единицы функции Дирихле), ни в одной точке предел $D(x)$ не существует, а значит, она разрывна на всей числовой прямой.*

Пример 48. Функция Римана $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, (m,n) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *— функция, принимающая значение $1/n$, если аргумент представим несократимой дробью со знаменателем n, и 0, если аргумент иррационален.*

Следствие 17 (Метод интервалов)**.** *Рассматривается неравенство*

$$\frac{F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \ldots \cdot F_n(x)}{G_1(x) \cdot G_2(x) \cdot \ldots \cdot G_m(x)} \geq 0$$

, где $F_1, F_2, \ldots F_n, G_1, G_2(x), \ldots, G_m$ непрерывны на некоторм множестве M. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_s$, в которых хотя бы одна из этих функций равна 0 разбивают M на непересекающиеся интервалы, в каждом из которых знак каждой функции сохраняется — это гарантирует теорема 51. Следовательно, определив каким–либо образом знак выражения $\frac{F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \ldots \cdot F_n(x)}{G_1(x) \cdot G_2(x) \cdot \ldots \cdot G_m(x)}$ в одной точке интервала, мы знаем знак во всех точках. Следовательно, можно получить ответ, выписав интервалы с нужным нам знаком.

Хотелось бы обратить внимание читателей на тот факт, что функции могут быть любыми, главное, чтобы они были непрерывны на интересующем нас множестве. В школьной программе обычно рассматривается частный случай, когда множители имеют вид $(x - a)^k$.

12.6 Обратные функции.

Теорема 52 (О существовании обратной функции)**.** *Пусть $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ и является строго монотонно возрастающей (убывающей). Тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ существует и непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$ (соответственно $[f(b), f(a)]$)*

Доказательство.
Не ограничивая общности рассуждений, считаем функцию f монотонно возрастающей.

Из следствия 15 вытекает, что $f(x)$ — сюръекция, а из монотонности $f(x)$ — что инъекция. Следовательно $f(x)$ является биекцией, поэтому существует обратная к ней функция.

Докажем непрерывность этой обратной функции. Выберем произвольное $x_0 \in (a, b)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим значения функции в окрестности $U_\varepsilon(x_0)$. Из монотонности и непрерывности функции $f(x)$ следует, что $f(U_\varepsilon(x_0)) = (f(x_0 - \varepsilon); f(x_0 + \varepsilon))$. Обозначим $y_0 = f(x_0)$ и выберем

$$\delta = \min\left(y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\right).$$

Очевидно, $f^{-1}(y_0 + \delta) \le x_0 + \varepsilon$ и $f^{-1}(y_0 - \delta) \ge x_0 - \varepsilon$, следовательно, $f^{-1}\left(\overset{\circ}{U}_\delta\,(y_0)\right) \subset U_\varepsilon(x_0)$. Таким образом, $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$.

Если же $x_0 = a$ или b, то следует брать односторонние окрестности — $U_\delta^+(a) = [a, a + \delta)$ и $U_\delta^-(b) = (b - \delta, b]$, в остальном доказательство остается прежним.

Замечание. Формулировка доказанной теоремы может быть слегка изменена для функции, непрерывной на открытом интервале, луче, всей числовой прямой. Только вместо отрезка $[f(a), f(b)]$ следует брать интервал (или луч) $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x); \lim\limits_{x \to b} f(x)\right)$.

Доказанная теорема является очень важной. Она позволяет обосновывать корректность определения корней, логарифмов, обратных тригонометрических функций.

12.6.1 Корни. Показательная и логарифмическая функция.

Пусть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. Она монотонно возрастает на $[0; +\infty)$, причем $\lim\limits_{x \to +infty} f(x) = +\infty$. Следовательно, по теореме 52 существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена и непрерывна на $[0; +\infty)$. Эту функцию обозначают $y = \sqrt[n]{x}$. Очевидно, она совпадает с ***арифметическим*** корнем степени n.

Пусть $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. Она монотонно возрастает на $(-\infty; +\infty)$, причем $\lim\limits_{x \to -infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Следовательно, по теореме 52 существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Эту функцию обозначают $y = \sqrt[n]{x}$. Очевидно, она совпадает с ***алгебраическим*** корнем степени n.

Пусть $a > 0$, определим рациональную степень числа как $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Для действительных x можно задать $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{p_n/q_n}$, где $\frac{p_n}{q_n} \to x$ при $n \to \infty$. Можно показать, что определение корректно, т.е. не зависит от выбора последовательности $\frac{p_n}{q_n} \to x$ и что получившаяся функция будет непрерывна. Ее называют показательной функцией с основанием a.

Пусть $a > 1$, тогда $f(x) = a^x$ является монотонно возрастающей на $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Следовательно, существует обратная функция, непрерывная на $(0; +\infty)$. Ее обозначают $x = \log_a y$ и называют логарифмом по основанию a. В случае $0 < a < 1$ логарифмическая функция определяется аналогично.

12.6.2 Обратные тригонометрические функции

Важно понимать, что синус, тангенс и т.д. не являются биекциями, поэтому, вообще говоря, обратных к ним не существует. Что же тогда понимают под обратными тригонометрическими функциями?

Определение 115. Рассмотрим функцию

$$\sin^*(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \text{не определена}, & x \notin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Указанная функция является биекцией $\sin^* : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \leftrightarrow [-1; 1]$. Таким образом существует функция, обратная к ней, которая называется **арксинус** и обозначается $\arcsin y$.

Определение 116. Рассмотрим функцию

$$\cos^*(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi] \\ \text{не определена}, & x \notin [0; \pi]. \end{cases}$$

Указанная функция является биекцией $\cos^* : [0; \pi] \leftrightarrow [-1; 1]$. Таким образом существует функция, обратная к ней, которая называется **арккосинус** и обозначается $\arccos y$.

Определение 117. Рассмотрим функцию

$$\mathrm{tg}^*(x) = \begin{cases} \mathrm{tg}\, x, & x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \text{не определена}, & x \notin (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Указанная функция является биекцией $\mathrm{tg}^* : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \leftrightarrow \mathbb{R}$. Таким образом существует функция, обратная к ней, которая называется **арктангенс** и обозначается $\mathrm{arctg}\, y$.

Определение 118. Рассмотрим функцию

$$\mathrm{ctg}^*(x) = \begin{cases} \mathrm{ctg}\, x, & x \in (0; \pi) \\ \text{не определена}, & x \notin (0; \pi). \end{cases}$$

Указанная функция является биекцией $\cos^* : (0; \pi) \leftrightarrow \mathbb{R}$. Таким образом существует функция, обратная к ней, которая называется **арккотангенс** и обозначается $\mathrm{arcctg}\, y$.

Замечание. Если допустить многозначные отображения, то можно построить обратные функции, напиример, следующим образом:

$$Asin(x) = \begin{cases} \{(-1)^n \cdot \arcsin x + \pi n\}_{n\in\mathbb{Z}}, & x \in [-1,1] \\ \text{не определена}, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Это отображение ставит каждому $x \in [-1;1]$ бесконечное множество чисел (а не одно число).

Упражнения

Упражнение 234. Сформулировать определения следующих пределов по-Гейне и по-Коши и доказать их эквивалентность:
a) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A - 0$;

Упражнение 235. Доказать, что следующее определение непрерывности эквивалентно исходному: функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, если для всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек M, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(a)$.

Упражнение 236. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Докажите, что $f(x)$ ограничена снизу.

Упражнение 237. Докажите теорему о промежуточном значении (следствие 15).

Упражнение 238. Доказать что $f(x) = \cos x$ непрерывна на всей числовой оси.

Упражнение 239. Доказать, что функция Римана $R(x)$ непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках.

Упражнение 240. Привести пример функции $f(x)$, разрывной во всех точках числовой прямой, такой, что $|f(x)| \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Упражнение 241. a) Привести пример функции, разрывной во всех точках числовой прямой кроме одной, т.е. непрерывной только в одной точке; b) привести пример функции, непрерывной ровно в двух точках; c)* ровно в n точках, $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 242. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен, про который известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что тогда и уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

Упражнение 243. Дана выпуклая фигура и точка A внутри нее. Докажите, что найдется хорда (т.е. отрезок, соединяющий две граничные точки выпуклой фигуры), проходящая через точку A и делящаяся точкой A пополам.

Упражнение 244. Пусть $f \in \mathcal{C}([0,1])$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что на отрезке $[0;1]$ найдутся 2 точки на расстоянии $\frac{1}{10}$, в которых функция $f(x)$ принимает равные значения.

Упражнение 245. О функции $f(x)$, заданной на всей вещественной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой.

Упражнение 246. Известно, что $D_f = \mathbb{R}$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство: $f(x+1) \cdot f(x) + f(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что $f \notin \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Упражнение 247. Доказать теорему о сущестовании обратной функции a) для непрерывной монотонно убывающей на отрезке функции. b) для функции, непрерывной и монотонно убывающей на $[0, +\infty)$, такой, что $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$.

Упражнение 248. a) В каких точках непрерывна *функция Дирихле*, равная 1 в иррациональных точках и 0 в рациональных? b) Тот же вопрос для *функции Римана*, которая равна 0 в иррациональных точках и равна $1/q$ в рациональной точке p/q (если дробь p/q несократима).

Упражнение 249. Привести пример функции, определённой на всей прямой и a) разрывной в целых точках и непрерывной в остальных; b) непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.

Упражнение 250. Доказать, что для любого счётного множества действительных чисел можно построить возрастающую функцию, разрывную во всех точках этого множества и непрерывную во всех остальных.

Упражнение 251. Может ли определённая на всех прямой возрастающая функция быть разрывной во всех точках?

Упражнение 252. Может ли функция быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных?

Упражнение 253. Две функции f и g определены на множестве M и непрерывны в точке $a \in M$. Доказать, что их сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель отличен от нуля в точке a) также непрерывны в этой точке.

Упражнение 254. Функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, принимает значения в множестве $Y \subset \mathbb{R}$ и непрерывна в точке $a \in X$. Функция g определена на множестве Y и непрерывна в точке $b = f(a)$. Доказать, что *композиция* $g \circ f$, то есть функция $x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$, непрерывна в точке a.

Упражнение 255. Функция f определена и непрерывна на отрезке. Доказать, что f ограничена на этом отрезке. Почему аналогичное рассуждение нельзя провести для интервала?

Упражнение 256. Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Доказать, что она достигает максимума: найдётся такая точка $m \in [a, b]$, что $f(x) \leq f(m)$ для всех $x \in [a, b]$.

Упражнение 257. Утверждение задачи 256 можно получить как следствие задачи 255, рассмотрев функцию $1/(f - \sup f)$. Провести это рассуждение подробно.

Упражнение 258. Назовём функцию f *ограниченной в окрестности точки* a, если найдётся интервал, содержащий a, на котором f ограничена. a)Привести пример функции, определённой на всей прямой и не ограниченной ни на каком интервале. b) Доказать, что всякая определённая на отрезке локально ограниченная (ограниченная в окрестности любой точки отрезка) функция ограничена на всём отрезке.

Упражнение 259. Функция f непрерывна на отрезке и принимает в его концах значения разных знаков. Доказать, что она имеет корень на этом отрезке.

Упражнение 260. Доказать, что существует корень любой целой положительной степени из любого положительного числа.

Упражнение 261. Доказать, что всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

Упражнение 262. Доказать, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, для которого $a + b + c > 0$ и $a - b + c < 0$, имеет (действительный) корень.

Упражнение 263. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

Упражнение 264. Доказать, что всякая строго возрастающая непрерывная функция, определённая на отрезке, является взаимно однозначным соответствием между двумя отрезками и обратная функция также непрерывна.

Упражнение 265. Доказать, что любое монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками непрерывно (в обе стороны).

Упражнение 266. a) Дать определение непрерывности для функций, определённых на плоскости. b) Доказать, что любой многочлен на комплексной плоскости непрерывен. c) Доказать, что для любого многочлена найдётся точка на комплексной плоскости, где его абсолютная величина минимальна. d) Доказать, что в этой точке многочлен неизбежно равен нулю (основная теорема алгебры).

Упражнение 267. Как надо доопределить функцию $\sin x/x$ в точке $x = 0$, чтобы она стала непрерывной всюду?

Упражнение 268. a) Доказать, что любое непрерывное отображение $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ отрезка в себя имеет неподвижную точку, т.е. точку x_0, такую, что $f(x_0) = x_0$; b) Показать, что для произвольной $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ это неверно; c) Показать, что для произвольной $f : (0,1) \mapsto (0,1)$ это тоже неверно; d) Пусть функция f непрерывна, причем $D_f = [0,1]$, $E_f = [0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(f(x)) \equiv x$. Доказать, что $f(x) \equiv x$.

Упражнение 269. Пусть $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $f(0) = f(1)$. Докажите, что а) При любом $n \in \mathbb{N}$ найдется горизонтальный отрезок длины $\frac{1}{n}$ с концами на графике f; б) Для отрезка произвольной длины $l \neq \frac{1}{n}$ это верно не для любой функции.

Упражнение 270. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве M, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что образы любых двух точек M, отстоящих менее чем на δ, отстоят менее чем на ε. a) Записать это определение символически. b) Очевидно, равномерно непрерывная на множестве M функция непрерывна во всех точках множества M. Показать, что обратное утверждение неверно. c) Будет ли функция $x \mapsto x^2$ равномерно непрерывной? d) Тот же вопрос для функции $x \mapsto \sqrt{x}$, определённой на множестве неотрицательных чисел. e) Тот же вопрос для функции $x \mapsto \sin(x^2)$. f)* Показать, что всякая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.

Упражнение 271. Доказать, что если две непрерывные функции определены на всей прямой и совпадают во всех рациональных точках, то они совпадают всюду.

Упражнение 272. Функция f определена и непрерывна на всей прямой, при этом $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Доказать, что эта функция есть умножение на константу.

Упражнение 273. *Показательная функция* $x \mapsto a^x$ (при любом $a > 0$) обладает такими свойствами: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Кроме того, при $a > 1$ она монотонно возрастает, при $a = 1$ постоянна, а при $a < 1$ убывает. Считая эти свойства известными, доказать, что показательная функция непрерывна a) в точке 0; b) во всех точках прямой. c) Доказать, что указанные в предыдущей задаче свойства определяют показательную функцию однозначно. d) Пользуясь лишь этими свойствами, доказать, что $6^x = 2^x 3^x$ при всех x.

Упражнение 274. a) Дать определение непрерывной на окружности функции. b) Доказать, что для любой непрерывной на окружности функции найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых она принимает равные значения.

Упражнение 275. Доказать, что любой многоугольник можно разделить вертикальной прямой на две равновеликие (равные по площади) части.

Упражнение 276. На плоскости нарисовано два многоугольника (возможно, пересекающихся). Доказать, что найдётся прямая, которая делит каждый из них на две равновеликие части.

Упражнение 277. Дать определение непрерывности для функции, определённой на подмножестве плоскости. Доказать, что всякая непрерывная на квадрате функция ограничена и достигает максимума.

Упражнение 278. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = x$ имеет решение.

Упражнение 279. Определённая на отрезке функция называется *выпуклой вниз*, если хорда, соединяющая любые две точки графика, лежит выше графика. Доказать, что всякая выпуклая вниз функция непрерывна.

Упражнение 280. Доказать, что если непрерывная на отрезке функция удовлетворяет неравенству $f((x+y)/2) \leq (f(x)+f(y))/2$, то она выпукла вниз.

Глава 13

Тригонометрические функции

13.1 Определение тригонометрических функций

Определение 119. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Целое число n такое, что $n \le x < n+1$ называется целой частью x и обозначается $[x]$.

Существование и единственность целой части устанавливает следующая

Теорема 53. $\forall x \in \mathbb{R} \exists! n \in \mathbb{Z} : n \le x < n+1$.

Доказательство.

- **Существование.** Для $x \in [0,1)$ полагаем $n = 0$. Для $x \ge 1$ множество $M = \{n \in \mathbb{N} : n \le x\}$ не пусто, так как $1 \in M$, и ограничено сверху числом x. По теореме Вейерштрасса существует $m = \sup M$. Если $m \in M$, то $m \le x < m+1$. Случай $m \notin M$ невозможен. Действительно, так как m есть точная верхняя грань M, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется $n \in M$, такое, что $m - \varepsilon < n \le m$. Тогда, если $m \notin M$, то для $\varepsilon = 1$ существует $n_1 \in M$ для которого выполнено $m - 1 < n_1 < m$ и для $\varepsilon = m - n_1$ существует $n_2 \in M$, для которого $m - (m - n_1) = n_1 < < n_2 < m$. Таким образом, $m - 1 < n_1 < n_2 < m$ и натуральное число $n_0 = n_2 - n_1$ таково, что $0 < n_0 < 1$, что невозможно. Если $x < 0$, то $-x > 0$ и по доказанному найдётся $m' \in \mathbb{Z}$ такое, что $m' \le -x < m'+1$. Тогда, $-(m'+1) < x \le -m'$. Таким образом, либо $n = x = -m'$, либо $n = -m' - 1 < x < -m'$.

- **Единственность.** Двойное неравенство $n \le x < n+1$ равносильно тому, что $x = n + \alpha$, где $\alpha \in [0,1)$. Если, кроме того, $x = m + \beta$, где $\beta \in [0,1)$, то $0 \le |m - n| = |\alpha - \beta| < 1$. Значит, если m и n целые, то $m = n$. $\square$

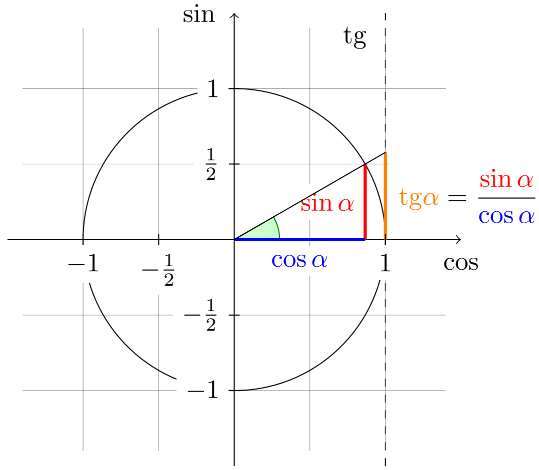


Рис. 13.1: Определение тригонометрических функций.

Теорема 54. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственная пара (α, n), где $\alpha \in [0; 2\pi)$ $n \in \mathbb{Z}$ такая, что $x = \alpha + 2\pi n$.*

Доказательство. Пусть $n = [\frac{x}{2\pi}]$ – целая часть $\frac{x}{2\pi}$. Тогда $n \le \frac{x}{2\pi} < n+1$, что равносильно $0 \le x - 2\pi n < 2\pi$. Полагая $\alpha = x - 2\pi n$, имеем утверждение теоремы. Существование и единственность следуют из существования и единственности целой части по теореме 53. Теорема доказана.

Определение 120. Рассмотрим в прямоугольной Декартовой системе координат на плоскости Oxy «единичную окружность» $x^2+y^2 = 1$ (см. Рис. 13.1). От оси абсцисс Ox «в положительном направлении», то есть против хода часовой стрелки, отложим угол xOz меры α радиан. Сторона Oz этого угла пересечёт единичную окружность в точке $M(x_0, y_0)$. По определению полагаем $\cos\alpha = x_0,\ \sin\alpha = y_0$. Если теперь x – произвольное действительное число, то по теореме 54 для x существует единственное представление $x = \alpha + 2\pi n$. Полагаем $\cos x = \cos\alpha,\ \sin x = \sin\alpha$,

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Определение 120 позволяет распространить понятие радианной меры угла (а также градусной меры ввиду линейности замены градусной меры на радианную) для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x \ge 0$ и $x = \alpha + 2\pi n$ – представление x, полученное по теореме 54. Полагаем, что угол меры x радиан получается откладыванием от оси абсцисс Ox n оборотов в положительном направлении (против хода часовой стрелки), и затем откладыванием в положительном направлении угла меры α радиан. Так как $-x = -\alpha - 2\pi n = (2\pi - \alpha) - 2\pi(n+1)$ и углы α и $(2\pi - \alpha)$ дополнительные, то можно считать, что угол $(2\pi - \alpha)$ получается откладыванием угла α в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки), и, таким образом, угол $(-x) \leq 0$ получается откладыванием от оси абсцисс Ox n оборотов в отрицательном направлении (по ходу часовой стрелки), и затем откладыванием в том же отрицательном направлении угла меры α радиан.

Заметим, что $\sin x$ и $\cos x$ существуют для всех $x \in \mathbb{R}$, а $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ существуют не для всех $x \in \mathbb{R}$.

Тригонометрические функции определим следующим образом.

Определение 121.

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x; \quad \operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{tg} x;$$

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x; \quad \operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{ctg} x.$$

13.2 Свойства тригонометрических функций

Определение 122. Пусть $M \subset \mathbb{R}$. Функция $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ называется периодической, если существует $\tau \neq 0$ такое, что для любого $x \in M$ выполнено $f(x+\tau) = f(x)$. Число τ называется периодом функции f. Полагаем ноль периодом любой функции. Наименьший положительный период T называется главным периодом.

Лемма 15. *Если τ – период функции $f : \mathbb{R} \supset M \longrightarrow \mathbb{R}$, то для любого $m \in \mathbb{Z}$ $m\tau$ – тоже период f.*

Доказательство. Если $\tau = 0$ или $m = 0$, то утверждение, очевидно, верно. Пусть $\tau \neq 0$. В случае $m > 0$ приме́ним принцип математической индукции. Базис индукции: $f(x+\tau) = f(x)$, что верно, так как τ - период f. Шаг индукции: $f(x+(m+1)\tau) = f(x+m\tau+\tau) = f(x+m\tau) = f(x)$ по предположению индукции. Для $m < 0$ имеем $f(x+m\tau) = f(x+m\tau - -m\tau) = f(x)$, так как $(-m) > 0$ и по доказанному $(-m\tau)$ – период f. Лемма доказана.

Теорема 55. *Если T – главный период функции $f : \mathbb{R} \supset M \longrightarrow \mathbb{R}$, то $\{mT : m \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех периодов функции f.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех периодов функции f. По лемме 15, $\{mT : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{M}$. Пусть $\tau \in \mathfrak{M}$ — произвольный элемент из $\mathfrak{M}$, а $n = [\frac{\tau}{T}]$ — целая часть $[\frac{\tau}{T}]$. Тогда $n \leq \frac{\tau}{T} < n+1$, что равносильно $0 \leq \tau - -nT < T$. Так как τ и $(-nT)$ – периоды f, то $f(x+\tau-nT) = f(x+\tau) = f(x)$, и таким образом $(\tau - nT)$ – тоже период f. Но T по условию – наименьший положительный период f. Поэтому из $0 \leq \tau - nT < T$ следует, что $\tau = nT$. Значит, $\tau \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subset \{mT : m \in \mathbb{Z}\}$. Так как $\{mT : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subset \{mT : m \in \mathbb{Z}\}$, то $\mathfrak{M} = \{mT : m \in \mathbb{Z}\}$. Теорема доказана.

Свойство 5. Синус и косинус – периодические функции с главным периодом $T = 2\pi$. Множество всех периодов этих функций есть $\{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Пусть $x = \alpha + 2\pi n$ – представление произвольного числа $x \in \mathbb{R}$, полученное по теореме 54. Тогда $x + 2\pi = \alpha + 2\pi(n + 1)$ – представление $x + 2\pi$. Мы видим из определения 120, что $\cos x = \cos(x + + 2\pi) = \cos\alpha$, $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin\alpha$. Значит, $T = 2\pi$ – период функций синус и косинус. На промежутке $[0; 2\pi)$ только для нуля $\cos 0 = 1$. Поэтому $T = 2\pi$ есть наименьший положительный период функции косинус, ведь если T', $0 \le T' < T$, – период косинуса, то должно выполняться $\cos 0 = = \cos T' = 1$, откуда следует, что $T' = 0$. На указанном промежутке только для двух точек, нуля и π, справедливо $\sin\pi = \sin 0 = 0$. Поэтому, если T', $0 \le T' < T$, – период синуса, то должно выполняться $\sin 0 = \sin T' = 0$, следовательно, $T' = \pi$. Но тогда $1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$. Противоречие. Значит, $T' \ne \pi$. Значит, $T' = 0$. Итак, $T = 2\pi$ – главный период функции синус. Так как 2π есть главный период, то по теореме 55 множество $\{mT : m \in \mathbb{Z}\}$ есть множество всех периодов. □

Свойство 6. Косинус — чётная функция, синус — нечётная функция.

Доказательство. Пусть $x = \alpha + 2\pi n$ – представление произвольного числа $x \in \mathbb{R}$, полученное по теореме 54. Тогда $(-x) = (2\pi - \alpha) + 2\pi(-n - 1)$. Ввиду 2π-периодичности синуса и косинуса достаточно доказать $\cos\alpha = = \cos(2\pi - \alpha)$, $\sin\alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$. Для $\alpha \in \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$ это утверждение, очевидно, верно. Пусть $\alpha \notin \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \pi\}$. Углы α и $2\pi - \alpha$ дополнительные. Поэтому, из равенства по гипотенузе и острому углу соответствующих прямоугольных треугольников, на единичной («тригонометрической») окружности числу α соответствует некоторая точка $A(x_0, y_0)$, а числу $(2\pi - \alpha)$ соответствует точка $B(x_0, -y_0)$, взятые из определения 120. Это означает $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, $\sin\alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$, что и требовалось доказать.

Свойство 7. Область определения функций синус и косинус $D(\sin) = = D(\cos) = \mathbb{R}$, область значений функций синус и косинус $E(\sin) = E(\cos) = = [-1; 1] \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно определениям 120 и 121, $D(\sin) = D(\cos) = = \mathbb{R}$, $E(\sin) \subset [-1; 1]$, $E(\cos) \subset [-1; 1]$. Таким образом, достаточно доказать, что $[-1; 1] \subset E(\sin)$, $[-1; 1] \subset E(\cos)$. Пусть $d \in [-1; 1]$. Тогда точки $A(d, \sqrt{1 - d^2})$ и $B(\sqrt{1 - d^2}, d)$ принадлежат единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$, так как их координаты удовлетворяют уравнению этой окружности. Пусть $\measuredangle xOA = \alpha$, $\measuredangle xOB = \beta$. Тогда $\cos\alpha = d$, $\sin\beta = d$. Свойство доказано.

Свойство 8. Тангенс и котангенс – нечётные периодические функции с главным периодом $T = \pi$. Область определения функции тангенс есть множество $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Область определения функции котангенс есть множество $\mathbb{R} \setminus \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Область значений этих функций есть вся числовая прямая.

Доказательство. Из свойств 5 и 6 для синуса и косинуса следует, что тангенс и котангенс нечётные 2π-периодические функции. В дальнейшем мы покажем, что их главный период равен π. Так как для произвольного $d \ge 0$ точка $(1; d)$ принадлежит прямой $y = \operatorname{tg}\varphi$ для некоторого φ, $0 \le \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, а точка $(1; -d)$ принадлежит прямой $y = -\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(-\varphi)$, то ввиду произвольности d имеем $E(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$. Аналогично устанавливается, что $E(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R}$. Так как на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ тангенс всюду определён, а на концах этого промежутка не определён, то ввиду π-периодичности тангенса заключаем, что $D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. Аналогично устанавливается, что $D(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

13.3 Тригонометрические тождества

Теорема 56. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Доказательство. 1) $x = \alpha + 2\pi n,\ y = \beta + 2\pi k,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi), n, k \in \in \mathbb{Z}$, – представления x и y. Далее, $\alpha \mapsto (\cdot)A(x_1, y_1),\ \beta \mapsto (\cdot)B(x_2, y_2)$ на тригонометрической окружности $x^2 + y^2 = 1$ в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости Oxy, $(\cdot)\ O(0, 0)$ - начало координат, $x_1 = = \cos x$, $y_1 = \sin x$, $x_2 = \cos y$, $y_2 = \sin y$. Ввиду чётности и периодичности косинуса имеем: $\cos(x - y) = \cos(\alpha - \beta + 2\pi(n - k)) = \cos|\alpha - \beta| = \cos(2\pi - - |\alpha - \beta|) = \cos\varphi$, где $\varphi = \min\{|\alpha - \beta|, 2\pi - |\alpha - \beta|\} = \measuredangle AOB$, $0 \le \varphi \le \pi$. Надо доказать: $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \cos\varphi$.

2) Пусть $(\cdot)C(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})$ - середина отрезка $[AB]$, быть может, в случае $A = B$, вырожденного в точку. Имеем:

$$|OC|^2 = (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 + (\frac{y_1 + y_2}{2})^2 =$$
$$= \frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{4} = \frac{1 + 1 + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{4}.$$

Следовательно, $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 2|OC|^2 - 1$. Мы видим, что значение $x_1 x_2 + y_1 y_2$ зависит только от меры угла $\measuredangle AOB$ и не зависит от взаимного расположения угла и системы координат, лишь бы вершина угла совпадала с началом координат. Рассмотрим угол $\measuredangle A_1 O B_1$ такой, что $\measuredangle A_1 O B_1 = \measuredangle AOB, = \varphi$, $A_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $B_1(1, 0)$. Тогда $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 \cdot \cos\varphi + 0 \cdot \sin\varphi = \cos\varphi$. Теорема доказана.

Лемма 16. *При любом $x \in \mathbb{R}$ выполнены тождества:*

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x.$$

Доказательство. По теореме 56 при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x.$$

Следовательно, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)) = \cos x$. □

Теорема 57. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие формулы:*

Формулы суммы. $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$, $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.
Формулы суммирования. $\sin x+\sin y=2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$, $\sin x-\sin y=2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$, $\cos x+\cos y=2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$, $\cos x-\cos y=-2\sin(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$.
Формулы разложения. $\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$, $\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$, $\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$.
Формулы двойного и тройного аргумента. Основное тригонометрическое тождество. $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.
Формулы приведения. $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$, $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-\sin x$, $\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x$, $\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$, $\sin(2\pi+x)=\sin x$, $\cos(2\pi+x)=\cos x$.

Справедливы также следующие тождества:

Формулы приведения. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+x)=-\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(\pi-x)=-\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(\pi+x)=\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}-x)=\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}-x)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+x)=-\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}+x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(2\pi-x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(2\pi-x)=-\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg}(2\pi+x)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(2\pi+x)=\operatorname{ctg} x$.

Доказательство. По теореме 56, $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$ $\cos(x+y)=\cos(x-(-y))=$ $=\cos x\cos(-y)+\sin x\sin(-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ ввиду чётности косинуса и нечётности синуса. По доказанному и по лемме 16 имеем $\sin(x+$ $+y)=\cos(\frac{\pi}{2}-(x+y))=\cos((\frac{\pi}{2}-x)-y)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cos y+\sin(\frac{\pi}{2}-$ $-x)\sin y=\sin x\cos y+\cos x\sin y$. Далее, $\sin(x-y)=\sin(x+(-y))=$ $=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$. Формулы суммы доказаны. По доказанному $\cos(x-y)+\cos(x+y) = 2\cos x\cos y$, $\sin(x-y)+\sin(x+y) = 2\sin x\cos y$, $\cos(x-y)-\cos(x+y) = 2\sin x\sin y$, что доказывает формулы разложения. Если в формулах разложения произвести замену $\alpha = x-y$, $\beta = x+y$, то получатся формулы суммирования.

Согласно формуле косинуса разности $1 = \cos 0 = \cos(x-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. По формуле синуса суммы $\sin 2x = \sin(x+x) = 2\sin x\cos x$, $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Аналогично при помощи формулы косинуса суммы доказывается формула косинуса тройного угла.

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются единообразно при помощи формул суммы, подобно тому как это было проделано для формулы $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$ в лемме 16.

Формулы приведения для тангенса и котангенса доказываются единообразно при помощи формул приведения для синуса и косинуса. Например, $\operatorname{tg}(\pi+x) = \frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$. Теорема доказана.

Замечание. Формулы приведения устанавливают π-периодичность тангенса и котангенса. Нетрудно видеть, что π есть главный период этих функций. Например, если T' - период тангенса и $0 \le T' < \pi$, то $\operatorname{tg} 0 = 0 = \operatorname{tg} T'$. Следовательно $T' = 0$.

Упражнение 281. Докажите следующие тождества.

- $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
- $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$
- $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$;
- $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}$;
- $\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}$;
- $\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}$;
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$;
- $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$,
- $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

- $1+\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1$;
- $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$;
- $|\sin\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$;
- $|\cos\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Замечание. Тождество есть равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

13.4 Обратные тригонометрические функции

Определение 123. Пусть отображения $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow X$ таковы, что $\forall x \in X\ \exists\ g(f(x))$ и $\forall y \in Y\ \exists\ f(g(y))$ (то есть существуют композиции $f \circ g$ и $g \circ f$), причём $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x = g(f(x))$ и $y = f(g(y))$. Тогда g называется обратным для f и обозначается f^{-1}.

Заметим, что если g обратное для f, то f – обратное для g.

Теорема 58. *Если обратное отображение существует, то оно единственно. Обратное для f отображение существует тогда и только тогда, когда f есть биекция, причём тогда f^{-1} тоже биекция и $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Доказательство. Очевидно биективное отображение имеет обратное. Действительно, если при биективном отображении f $x_1 \mapsto y_1$, $x_2 \mapsto y_2, \ldots,$ то f^{-1} можно определить как отображение, при котором $y_1 \mapsto x_1$, $y_2 \mapsto x_2$ и так далее. Пусть $g : Y \longrightarrow X$ обратное для $f : X \longrightarrow Y$. Тогда для всех $y \in Y$ справедливо $y = f(g(y))$. Значит, f сюръективно (каждый элемент $y \in Y$ имеет прообраз – такое $x \in X$, что $y = f(x)$.) Далее, если $f(x) = f(x')$, то $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$. Значит, f инъективно (если $x \neq x'$, то $f(x) \neq f(x')$ – «разные точки переходят в разные»). Так как f инъективно и сюръективно, то f биективно. Итак, если f имеет обратное для g, то f биекция. Но тогда g обратное для f тоже биекция. Если, кроме g, отображение g' обратное для f, то для всех $y \in Y$ справедливо $x = g'(y) = g'(f(x)) = g(f(x)) = g(y)$, то есть $g' = g$. таким образом, g единственное обратное для f. Но тогда и f единственное обратное для g и, таким образом, $(f^{-1})^{-1} = f$. Теорема доказана.

Теорема 59. *Пусть X и Y числовые множества и отображение $f : X \longrightarrow Y$ имеет обратное. Тогда графики обратных отображений f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$. Функция f нечётная тогда и только тогда, когда f^{-1} нечётная, f строго возрастает тогда и только тогда, когда f^{-1} строго возрастает, f строго убывает тогда и только тогда, когда f^{-1} строго убывает.*

Доказательство. Точка $A(x_0, y_0) \in \Gamma_f$ тогда и только тогда, когда $B(y_0, x_0) \in \in \Gamma_{f^{-1}}$ согласно определению обратного отображения. Точка $C(\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{y_0+c_0}{2})$ — середина отрезка $[AB]$. Пусть $(\cdot)$ $O(0;0)$ – начало координат. Очевидно $C \in \Gamma_{y=x}$, $|OA| = |OB| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Тогда если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $[OC]$ есть медиана и высота в равнобедренном треугольнике AOB. Значит, точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$. Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то они либо совпадают, либо все различны, и тогда из $y_0 = kx_0$, $x_0 = ky_0$, $x_0 \neq y_0$ следует, что $k = -1$. Так как прямые $y = x$ и $y = -x$ перпендикулярны, то и в этом случае точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$.

Далее, если f нечётная функция, то $(x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff (-x_0, -y_0) \in \Gamma_f$. Тогда имеем: $(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (x_0, y_0) \in \Gamma_f \iff (-x_0, -y_0) \in \Gamma_f \iff \iff (-y_0, -x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$, то есть, $(y_0, x_0) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (-y_0, -x_0) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Таким образом, f^{-1} нечётная функция. Значит, f нечётная функция $\iff f^{-1}$ нечётная функция.

Если f строго возрастает, то $x_1 < x_2 \iff y_1 < y_2$. Так как $(y_0, x_0) \in \in \Gamma_{f^{-1}} \iff (x_0, y_0) \in \Gamma_f$, то и f^{-1} строго возрастает. Значит, f строго возрастает $\iff f^{-1}$ строго возрастает. Аналогично исследуется случай строгого убывания. Теорема доказана.

13.5 Первый замечательный предел

Лемма 17. *Для всех* $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ *выполняются неравенства* $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство.
Рассмотрим треугольники $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ и сектор OAB (см. рис. 13.2). Очевидно, что $S(\triangle OAB) < S(OAB) < S(\triangle OAC)$. Но $S(\triangle OAB) = \frac{1}{2}\sin\alpha$, $S(OAB) = \frac{x}{2}$ и $S(\triangle OAC) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Умножая на 2, получим требуемое неравенство.

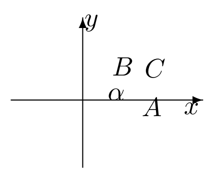


Рис. 13.2:

Теорема 60 (Первый замечательный предел)**.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1}$.

Доказательство.
Из леммы 17 вытекает, что $x \cdot \cos x < \sin x < x$. Разделив все на $x \neq 0$, получим $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Эти неравенства выполнены и при $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ — следует из четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$. Поскольку, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, по

теореме 40 (о двух милиционерах для функций) получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\square$

Упражнение 282. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Глава 14

Показательная и логарифмическая функции.

14.1 Показательная функция.

14.1.1 Степень с рациональным показателем.

Напомним, что арифметическим корнем n-й степени из числа $A \geqslant 0$ (обозначается $\sqrt[n]{A}$) называется число $a \geqslant 0$, такое, что $a^n = A$. Позднее будет показано, что такое число существует и единственно. Рациональная степень числа определяется следующим образом:

$$A^{p/q} = \sqrt[q]{A^p}.$$

Это определение является довольно таки осмысленным. Действительно, $(A^{p/q})^q = (\sqrt[q]{A^p})^q = A^p$, т.е. выполняются привычные правила работы со степенями.

Напомним эти правила ($A, B > 0$):

1. $A^0 = 1$;
2. $A^{-r} = 1/A^r$;
3. $A^r \cdot A^s = A^{r+s}$;
4. $A^r/A^s = A^{r-s}$;
5. $(A^r)^s = A^{rs}$;
6. $A^r \cdot B^r = (AB)^r$;
7. $A^r/B^r = (A/B)^r$;
8. Пусть $r > s$, тогда, $A^r > A^s$, если $A > 1$ и $A^r < A^s$, если $0 < A < 1$; Более компактно это свойство может быть записано в виде

$$\operatorname{sign}(A^r - A^s) = \operatorname{sign}(A - 1) \cdot \operatorname{sign}(r - s).$$

14.1.2 Функциональное уравнение Коши

Определение 124. Уравнение $f(x+y) = f(x) + f(y)$ называется **функциональным уравнением Коши**.

Будем исследовать это уравнение. Сразу заметим, что $f(x) \equiv 0$ удовлетворяет этому уравнению. Существуют ли другие решения?

Лемма 18. $f(0) = 0$.

Доказательство.
Обозначим $f(0) = c$, тогда $C = f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2C$, следовательно $C = 0$.

Лемма 19. $f(nx) = nf(x)$, *при любом* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.
Будем доказывать по индукции.
База индукции. $f(x) = 1 \cdot f(x)$.
Шаг индукции. Пусть $f(nx) = nf(x)$, тогда $f\big((n+1)x\big) = f(nx) + f(x) = = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$.

Следствие 18. *Обозначим* $f(1) = a$, *тогда* $f(n) = an$, *при любом* $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 20. $f(-x) = -f(x)$, *т.е. функция* f *— нечетная.*

Доказательство.
$f(x) + f(-x) = f(x-x) = f(0) = 0$.

Следствие 19. *Обозначим* $f(1) = a$, *тогда* $f(n) = an$, *при любом* $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 21. $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$ *при всех* $n \in N$.

Доказательство.
По лемме 19 $f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = nf(\frac{x}{n})$, следовательно, $f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x)$.

Следствие 20. *Пусть* $f(1) = a$, *тогда* $f(x) = ax$ *при всех* $x \in \mathbb{Q}$.

Доказательство.
Пусть $x = \frac{m}{n}$, тогда $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}f(m) = \frac{am}{n} = ax$.

Итак, мы получили, что функция $f(x)$ совпадает с линейной функцией при рациональных x. Хотелось бы распространить это на действительные числа. Вообще говоря, уравнения Коши для этого недостаточно — можно, вообще говоря, построить нелинейную функцию, удовлетворяющую этому уравнению.

Потребуем, чтобы $f(x)$ была непрерывной функцией.

Теорема 61. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R})$ *удовлетворяет уравнению Коши. Тогда* $f(x) = ax$, *где* $a = f(1)$.

Доказательство.
Рассмотрим последовательность $x_n \in \mathbb{Q}$, сходящуюся к x. Тогда по непрерывности $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot x_n = a \lim\limits_{n\to\infty} x_n = ax$.

Вместо непрерывности можно было потребовать монотонности функции.

Теорема 62. *Пусть f — монотонная функция, удовлетворяющая уравнению Коши. Тогда $f(x) = ax$, где $a = f(1)$.*

Доказательство.
Рассмотрим случай $a = 0$, тогда $f(q) = 0$ для всех рациональных q. Тогда, рассмотрим какой-нибудь отрезок $x \in [q_1, q_2]$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, тогда $f(x) \in \in [f(q_1), f(q_2)]$ из монотонности, следовательно $f(x) = 0$.

Пусть $a \geqslant 0$ (в случае $a < 0$ можно рассмотреть $-f(x)$).

Допустим, найдется x, такой, что $f(x) \neq ax$.

Если $f(x) > ax$, найдем рациональное $q \in (x, f(x)/a)$. Получаем $f(x) < < f(q) = aq < a\frac{f(x)}{a} = f(x)$. Противоречие. Случай $f(x) < ax$ рассматривается аналогично.

14.1.3 Функциональная характеристика показательной функции

Определение 125. Функциональное уравнение

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \tag{14.1.1}$$

называется **характеристическим уравнением показательной функции**.

Заметим, что функция $f(x) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению 14.1.1. Более того, если при каком-то x_0 функция $f(x_0) = 0$, то для любого x можно записать $f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0) \cdot f(x_0) = 0$. Если же $f(x) \not\equiv 0$, то при всех x выполнено $f(x_0) \neq 0$.

Кроме того, заметим, что $f(x) = f(x/2)^2 \geqslant 0$. Поэтому указанная функция всюду положительна (если не равна тождественно нулю).

В дальнейшем будем считать, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению 14.1.1 и не тождественно равна нулю.

Будем исследовать свойства $f(x)$ аналогично предыдущему разделу.

Лемма 22. *Если $f \not\equiv 0$, то $f(0) = 1$.*

Доказательство.
$f(0) = f(0 + 0) = f^2(0)$. Уравнение $A^2 = A$ имеет два корня: 0 и 1, но если $f(0) = 0$, то $f \equiv 0$, что противоречит нашему предположению.

Лемма 23. *Если $f \not\equiv 0$, то $f(nx) = f^n(x)$ при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство.
Доказываем индукцией по n.
База индукции. Очевидно $f(x) = f^1(x)$.
Шаг индукции. Пусть $f(nx) = f^n(x)$. Тогда $f((n + 1)x) = f(nx + x) = = f(nx) \cdot f(x) = f^n(x) \cdot f(x) = f^{n+1}(x)$.

Лемма 24. *Если $f \not\equiv 0$, то $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.*

Доказательство.
$f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1$. Следовательно, $f(-1) = 1/f(x)$.

Следствие 21. *Если $f \not\equiv 0$, то $f(nx) = f^n(x)$ при любом $n \in \mathbb{Z}$.*

Лемма 25. *Если $f \not\equiv 0$, то $f(\frac{x}{n}) = \sqrt[n]{f(x)}$.*

Доказательство.
$f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = f^n(\frac{x}{n})$, следовательно (т.к. $f(\frac{x}{n}) > 0$), $f(\frac{x}{n}) = \sqrt[n]{f(x)}$.

Следствие 22. *Если $q \in \mathbb{Q}$, то $f(qx) = f^q(x)$*

Итак, если обозначить $f(1) = a$, то $f(x) = a^x$ при всех $x \in \mathbb{Q}$. Хотелось бы получить такое же равенство при всех x. Но для этого сначала необходимо определить, что такое степень с действительным показателем.

14.1.4 Степень с действительным показателем

Пусть $A > 1$, x — произвольное действительное число. Определим $y = A^x$ следующим образом: Обозначим $a_1 = [x]$, $b_1 = [x] + 1$ (напомним, что $[x]$ — целая часть числа x). Тогда (из монотонности) должно выполняться $y \in [A^{a_1}; A^{b_1}]$. Выберем середину отрезка $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если $x < c_1$, то выберем $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$, иначе $a_2 = c_1$ и $b_2 = b_1$; в любом случае $y \in [A^{a_2}; A^{b_2}]$. И так далее, каждый раз выбираем ту половину отрезка, которой принадлежит число x. Таким образом, последовательно построим последовательность вложенных отрезков

$$[A^{a_1}; A^{b_1}] \supset [A^{a_2}; A^{b_2}] \supset \ldots \supset [A^{a_n}; A^{b_n}] \supset \ldots$$

Докажем, что она стягивающаяся. Заметим, что длина n-го отрезка равна $A^{b_n} - A^{a_n} = A^{a_n}(A^{b_n - a_n} - 1) < A^{[x]+1} \cdot (A^{1/2^n} - 1)$. По лемме 30 последовательность $\sqrt[2^n]{A} - 1$ является б.м.п., а $A^{[x]+1}$ — постоянная. Следовательно, длина отрезка — б.м.п. $\square$

Итак, существует единственная точка пересечения $\{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[A^{a_n}; A^{b_n}]$. Ее и будем считать степенью A^x.

Замечание. Мы определили функцию A^x только для $A > 1$. Если же $0 < A < 1$, то ее можно определить $A^x = \left(\frac{1}{A}\right)^{-x}$.

Замечание. Для рациональных показателей это определение совпадает с ранее приведенным. Действительно, если $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то $A^{a_n} \leqslant \sqrt[q]{A^p} \leqslant A^{b_n}$, следовательно, точка $A^r = \sqrt[q]{A^p}$ принадлежит всем отрезкам $[A^{a_n}; A^{b_n}]$, поэтому совпадает с y.

Теорема 63. *Показательная функция $y = A^x$ монотонна на всей числовой оси. Она является возрастающей при $A > 1$ и убывающей при $0 < A < 1$.*

Доказательство.
Докажем при $A > 1$, при $A \in (0,1)$ доказывается аналогично.

Пусть $x_1 < x_2$, выберем n, такое, что $2^{-n} < \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$. Если $x_1 \in [a_n^1; b_n^1]$ и $x_2 \in [a_n^2; b_n^2]$, то $b_n^1 < a_n^2$. Поэтому $A^{x_1} \leqslant A^{b_n^1} < A^{a_n^2} \leqslant A^{x_2}$.

Теорема 64. *Показательная функция $y = A^x$ непрерывна на всей числовой оси.*

Доказательство.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$, докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} A^{x_n} = A^X$. Рассмотрим отрезки $x_n \in [a_n, b_n]$ и $X \in [a_n^0, b_n^0]$, полученные методом деления пополам (длина каждого 2^{-n}). Тогда

$$|A^{x_n} - A^X| \leqslant |A^{x_n} - A^{a_n}| + |A^{a_n} - A^{a_n^0}| + |A^{a_n^0} - A^X| \tag{14.1.2}$$

Будем брать n достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $x_n < X + 1$.

Тогда $|A^{x_n} - A^{a_n}| = A^{x_n}|A^{a_n - x_n} - 1| < A^{X+1} \cdot |A^{2^{-n}} - 1|$ — б.м.п. по лемме 30. Аналогично доказывается, что $|A^{a_n^0} - A^X|$ — тоже б.м.п.

Для оценки второго слагаемого в 14.1.2 заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^0 = X$. Следовательно, $|A^{a_n} - A^{a_n^0}| < A^{X+1} \cdot |A^{a_n - a_n^0} - 1|$ — б.м.п.

Для степени с действительным показателем выполнены те же свойства 1-63. Это следует из доказанной теоремы. Действительно, достаточно взять последовательность рациональных чисел, которые сходятся к данным a, b, ..., а потом перейти к пределу по теореме 64.

Теорема 65. *Определенная таким образом показательная функция $f(x) = a^x$ удовлетворяет характеристическому уравнению $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.*

Доказательство.
Если рассмотреть последовательности стягивающихся отрезков $[a_n^x, b_n^x]$ и $[a_n^y, b_n^y]$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^x + a_n^y) = x + y$, следовательно, по непрерывности, $A^{x+y} = \lim\limits_{n\to\infty} A^{a_n^x + a_n^y} = \lim\limits_{n\to\infty} A^{a_n^x} \cdot A^{a_n^y} = \lim\limits_{n\to\infty} A^{a_n^x} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} A^{a_n^y} = A^x \cdot A^y$.

Теорема 66. *Если $f(x)$ удовлетворяет характеристическому уравнению, непрерывна и не равна тождественно нулю, то $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$.*

Доказательство.
Предположим, что существует другая функция f_1, удовлетворяющая условиям теоремы, причем в некоторой точке x_0 она не совпадает с a^{x_0}, где $a = f_1(1)$. Рассмотрим последовательность $q_n \in \mathbb{Q}$, сходящуюся к x_0. По следствию 22 для любого рационального q_n выполнено $f_1(q_n) = a^{q_n}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $f_1(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_1(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = a^{x_0}$. Противоречие.

Итак, непрерывным решением характеристического уравнения являются только тождественный ноль и показательные функции.

Замечание. Вообще говоря, существуют другие (разрывные) решения характеристического уравнения.

14.2 Логарифм.

!!!Переделать!!!

Теорема 67. *Пусть $a > 1$. Тогда существует единственная функция $f : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\forall x, x' > 0(f(x \cdot x') = f(x) + f(x'))$;*
2) $\forall x > x' > 0(f(x) > f(x'))$;
3) $f(a) = 1$.

Доказательство.

В данном доказательстве используется один важный прием: **Мы предполагаем, что некоторый объект существует, начинаем изучать его (потенциальные!) свойства. На основе этих свойств строится указанный объект, откуда и вытекает его существование.**

Предположим, что такая функция существует и подумаем, какими свойствами она должна обладать.

Свойство 1: Применив $n-1$ раз условие 1), получим $f(x^n) = nf(x)$.

Свойство 2: Подставив в предыдущее свойство $\sqrt[n]{x}$, получим $f(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} f(x)$.

Свойство 3: $f(1) = 0$, поскольку $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$.

Свойство 4: $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$, поскольку $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(1) = 0$.

Свойство 5: Из предыдущих свойств и условия 3) вытекает $\forall q \in \mathbb{Q}(f(a^q) = q)$.

Свойство 6: Из свойства 5 и условия 2) вытекает, что если $a^{q'} < x < a^{q''}$, то $q' < f(x) < q''$.

Построим теперь функцию f. Выберем $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $a^n \leqslant x < a^{n+1}$. Построим последовательность стягивающихся отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом: $a_0 = n$, $b_0 = n+1$. На k-м шаге рассматриваем $c_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$; если $a^c \leqslant x$ то выбираем $a_k = c$ и $b_k = b_{k-1}$, иначе $a_k = a_{k-1}$ и $b_k = c$. При этом, на каждом шаге $a^{a_k} \leq x < a^{b_k}$, следовательно $f(x) \in [a_k, b_k) \subset [a_k, b_k]$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Заметим, что указанная последовательность отрезков будет стягивающейся (т.к. длина равна 2^{-n}), поэтому пересечение состоит ровно из одной точки $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{y\}$. Следовательно, если $f(x)$ удовлетворяет условиям 1)-3), то ее значение должно быть равно y.

Докажем теперь в обратную сторону — то, что полученная таким образом функция удовлетворяет условиям 1)–3).

Докажем условие 3). Очевидно, на k–шаге получим: $a^1 \leq a < a^{\frac{2^k+1}{2^k}}$, а $\cap_k [1, \frac{2^k+1}{2^k}] = \{1\}$. Следовательно $f(a) = 1$.

Докажем условие 1). На k–шаге для x, x' $a^{\frac{n_k}{2^k}} \leq x < a^{\frac{n_k+1}{2^k}}$ и $a^{\frac{n'_k}{2^k}} \leq x < a^{\frac{n'_k+1}{2^k}}$. Перемножив эти неравенства (все числа в них положительны!),

получим
$$a^{\dfrac{n_k+n'_k}{2^k}} \le x\cdot x' < a^{\dfrac{n_k+n'_k+2}{2^k}},$$
следовательно
$$\frac{n_k+n'_k}{2^k} \le f(x\cdot x') < \frac{n_k+n'_k+2}{2^k}.$$
С другой стороны, сложив $\frac{n_k}{2^k} \le f(x) < \frac{n_k+1}{2^k}$ и $\frac{n'_k}{2^k} \le f(x') < \frac{n'_k+1}{2^k}$, получим
$$\frac{n_k+n'_k}{2^k} \le f(x)+f(x') < \frac{n_k+n'_k+2}{2^k}.$$
Таким образом, числа $f(x\cdot x')$ и $f(x)+f(x')$ принадлежат одному интервалу длины $\frac{2}{2^k} = 2^{1-k}$, а значит $|f(x\cdot x') - (f(x)+f(x'))| < 2^{1-k}$, из произвольности вытекает $f(x\cdot x') - (f(x)+f(x')) = 0$, □

Докажем теперь свойство 2). Рассмотрим произвольное $u > 1$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $u^n > a$. Очевидно $f(u) > \frac{1}{n} > 0$. Пусть теперь $x > x' > 0$. Рассмотрим $f(x) = f(x'\cdot\frac{x}{x'}) = f(x') + f(\frac{x}{x'}) > f(x')$, □

Итак, построенная функция (и только она) удовлетворяет условиям 1)–3). Построенная функция называется **логарифм по основанию** a и обозначается $\log_a x$. Для логарифмов по основаниям e и 10 приняты обозначения: $\log_e x = \ln x$ $\log_{10} x = \lg x$.

Аналогично строится логарифмическая функция при $0 < a < 1$.

14.3 Свойства логарифмов

14.3.1 Алгебраические свойства

Алгебраические свойства вытекают из следующей теоремы.

Теорема 68. *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда для любых $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,+\infty)$ выполнены неравенства:*
$$\log_a(a^x) = x,$$
$$a^{\log_a y} = y.$$
Другими словами, логарифмическая и показательная функции являются взаимно обратными.

Доказательство.
Доказательство вытекает из построения показательной и логарифмической функций. □

Утверждение 41. $\log_a x \in \mathcal{C}(0,+\infty)$.

Доказательство.
Докажем сначала, что $\log_a \in \mathcal{C}(1)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Пусть $\delta = \min(a^{1/n}-1, 1-a^{-1/n})$, тогда $\log_a(1+\delta) \le$ $\le \log_a(a^{1/n}) = \frac{1}{n} < \varepsilon$ и $\log_a(1-\delta) \ge \log_a(a^{-1/n}) = -\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Следовательно

$\lim\limits_{x\to 1}\log_a x = 0 = \log_a 1$, что и означает непрерывность функции $\log_a x$ в точке $x = 1$.

Докажем теперь непрерывность $\log_a x$ в точке $x = x_0 > 0$. Представим $\log_a x = \log_a x_0 + \log_a \frac{x}{x_0}$. Функция $\log_a \frac{x}{x_0}$ непрерывна в $x = x_0$, поскольку $\log_a x$ непрерывна в $x = 1$ а $\log_a x_0$ — постоянная, следовательно $\log_a x$ непрерывна в $x = x_0$, $\square$

Утверждение 42. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Доказательство.
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. Она удовлетворяет условиям 1) и 2) из теоремы 67 и $f(b) = 1$, следовательно $f(x) = \log_b x$ $\square$

Понятие логарифма можно ввести и для оснований $0 < b < 1$. $\log_b x = = -\log_{1/b} x$ В этом случае условия 1) и 3) теоремы 67 выполнены для $\log_b$, а условие 2) превращается в $\forall x > x' > 0(\log_b x < \log_b x')$.

14.3.2 Показательная функция. Второй замечательный предел.

Поскольку логарифм есть непрерывная и монотонная функция, то существует обратная к нему — показательная, обозначаемая a^x. Такое обозначение имеет смысл, поскольку при $x \in \mathbb{Q}$ значения этой функции совпадают с соответствующими степенями a. Наибольшее значение в математическом анализе имеет показательная функция, называемая экспонента, т.е. e^x, где e — число Эйлера.

Пусть $a > 1, b \in (0, 1)$. Тогда верны соотношения:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = 0$;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$;
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = +\infty$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$;
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_b x = -\infty$;
7. $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty$;
8. $\lim\limits_{x\to+0} \log_b x = +\infty$;

Докажем, например свойство 6. Выберем произвольную последовательность $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Пусть $b < 1$ выберем произвольное $c > 0$, тогда возьмем $x_n > (\frac{1}{b})^{[c]+1}$. Очевидно $\log_b x_n < -[c] - 1 < -c$, следовательно, $(-\infty, -c)$ — ловушка последовательности $\log_b x_n$, $\square$

Доказательство остальных свойств логарифмической функции предоставляется в качестве упражнения.

Теорема 69.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

Доказательство.
В 1-м семестре (утверждение **??**) было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Из непрерывности логарифма вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, т.е. последовательность $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.п. Рассмотрим произвольную последовательность $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, не ограничивая общности рассуждение можно считать, что $x_n>1$. Тогда

$$\frac{\ln[x_n]}{[x_n]+1}<\frac{\ln x_n}{x_n}<\frac{\ln[x_n]+1}{[x_n]}.$$

Но последовательность $\left\{\frac{\ln[x_n]}{[x_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, а значит — б.м.п. тоже. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln[x_n]}{[x_n]+1}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln[x_n]}{[x_n]}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x_n]}{[x_n]+1}=0\cdot1=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln[x_n]+1}{[x_n]}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln[x_n]}{[x_n]}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{[x_n]}=0+$ $+0=0$. Следовательно, по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_n}=0$, □

Следствие 23. *Пусть* $\alpha,\beta>0$, *тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha}x}{x^{\beta}}=0.$$

Доказательство.
Обозначим $y=x^{\beta/\alpha}$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y(\alpha/\beta}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\ln y}{y}\right)=$ $=0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha}x}{x^{\beta}}=0$ □

Следствие 24. *Пусть* $\alpha>0$, $a>1$, *тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0.$$

Доказательство.
Сделаем замену $a^x=y$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha}y}{\ln^{\alpha}a\cdot y}=0$.

Следствие 25. *Пусть* $k\in\mathbb{N}$, $\beta>0$, *тогда*

$$\lim_{x\to+0}\ln^{k}x\cdot x^{\beta}=0.$$

Доказательство.
Сделаем замену $y=\frac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0}\ln^{k}x\cdot x^{\beta}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln^{k}\frac{1}{x}}{x^{\beta}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{(-1)^{k}\ln^{k}x}{x^{\beta}}=$ $=0$.

Теорема 70 (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Доказательство.
Для доказательства нам потребуется несколько вспомогательных лемм:

Лемма 26. $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доказательство.
Рассмотрим произвольную последовательность $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, где $x_n>0$. Выберем последовательность целых чисел $y_n=\left[\frac{1}{x_n}\right]$. Очевидно, $\frac{1}{y_n+1}\leq$ $\leq x_n\leq\frac{1}{y_n}$. Следовательно $\left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n}\leq(1+x_n)^{1/x_n}\leq\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1}=e$, то по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e$, □

Лемма 27. $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доказательство.
Рассмотрим произвольную последовательность $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, где $x_n<0$. Выберем последовательность целых чисел $y_n=\left[-\frac{1}{x_n}\right]$. Очевидно, $-\frac{1}{y_n}\leq x_n\leq$ $\leq-\frac{1}{y_n+1}$. Следовательно, $\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{-y_n}\leq(1+x_n)^{1/x_n}\leq\left(1-\frac{1}{y_n+1}\right)^{-y_n-1}$. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=e.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{-y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{y_n+1}\right)^{-y_n-1}=e$,откуда по теореме о двух милиционерах и получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e$, □

Лемма 28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Доказательство.
Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда из предыдущих лемм вытекает, что существует $\delta_1>0$ такое, что для всех $x\in(0,\delta_1)$ выполнено неравенство $|(1+x)^{\frac{1}{x}}-e|<\varepsilon$ и существует $\delta_2>0$, такое, что для всех $x\in(-\delta_2,0)$ выполнено неравенство $|(1+x)^{\frac{1}{x}}-e|<\varepsilon$. Взяв $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, получим определение предела в точке.

Лемма 29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Доказательство.
$1=\ln e=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, □

Доказательство (Теоремы 70).
Сделаем замену $y = e^x - 1$ и рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, □

Следствие 26. *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

.

Следствие 27. *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

.

Следствие 28. *Пусть $p \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

.

В качестве заключения запишем в асимптотической форме утверждения, доказанные в этом разделе:

- $\log_a x = \overline{\overline{o}}(x^\alpha)$, при $x \to +\infty$, $a > 1$, $\alpha > 0$;
- $x^\alpha = \overline{\overline{o}}(a^x)$, при $x \to +\infty$, $a > 1$, $\alpha > 0$;
- $\log_a x = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{x^\alpha})$, при $x \to +0$, $a > 1$, $\alpha > 0$;
- $e^x = 1 + x + \overline{\overline{o}}(x)$ при $x \to 0$;
- $a^x = 1 + \ln a \cdot x + \overline{\overline{o}}(x)$ при $x \to 0$, $a > 0$;
- $\ln(1+x) = x + \overline{\overline{o}}(x)$ при $x \to 0$;
- $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \overline{\overline{o}}(x)$, $x \to 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- $(1+x)^p = 1 + p \cdot x + \overline{\overline{o}}(x)$ при $x \to 0$.

Глава 15

Производная

Серега>
Ваня а производная от того самого какая?
-=Grek=->
(того самого)' = того'*самого + того*самого' = это самого того этого

(по материалам bash.org.ru)

15.1 Введение. Физический и геометрический смысл производной.

С древних времен людей интересовала возможность измерять мгновенную скорость.

Например, известена апория (парадокс) Зенона Элейского: *«Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она занимает равное себе положение, то есть покоится; поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится во все моменты времени, то есть не существует момента времени, в котором стрела совершает движение.»*

Для того, чтобы разобраться с этим парадоксом, следует каким-то образом измерить скорость в бесконечно малый промежуток времени. На помощь нам приходит теория пределов.

Предположим, что положение тела в момент времени t задается координатой $f(t)$. Тогда рассмотрим промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. За этот промежуток времени точка проходит расстояние[1], равное $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Таким образом, средняя скорость на этом отрезке времени равна

[1] Тут расстояние берется со знаком «+», если движение происходит в положительном направлении оси y, и со знаком «-», если оно происходит в противоположном направлении.

$\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$. Рассмотрим предел этого выражения при $\Delta t \to 0$. Этот предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ и называют мгновенной скоростью в момент времени t_0. Аналогично, можно определить мгновенное ускорение $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$, где $v(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t.

Заметим, что таким образом можно оценивать скорость изменения одной величины при малых изменениях другой. Так, например, в экономике, используется термин «эластичность», который показывает, насколько сильно меняется одна величина при малом изменении другой. Например, *Эластичность спроса по цене* — чувствительность спроса к изменению цены (процентное изменение спроса на 1% изменения цены), тоже может быть представлена в виде отношения изменений спроса и цены.

Рис. 15.1: Зенон Элейский

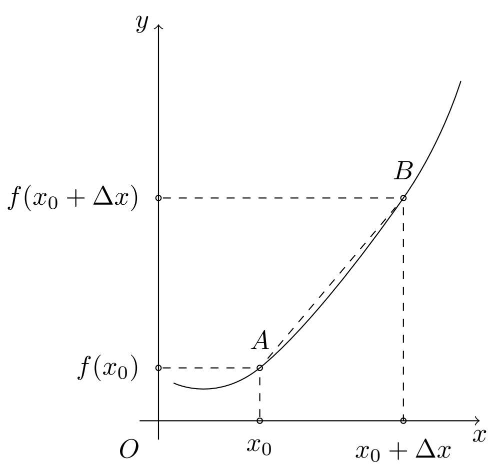


Рис. 15.2: Геометрический смысл производной.

Другая интерпретация — геометрическая (см. рис. 15.2). Рассмотрим точку $A(x_0, y_0)$ на графике функции $y = f(x)$. При малом изменении x точка $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ будет располагаться очень близко к точке A, соответственно, прямая AB будет в каком–то смысле близка к касательной , проведеной в точке A к графику. Если же устремить $\Delta x \to 0$, то в пределе, получим касательную.

Угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$, следовательно, его предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$ будет угловым коэффициентом касательной к графику.

15.2 Определение. Правила дифференцирования.

Определение 126. Если существует предел

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x},$$

то говорят, что функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, а значение предела называют **производной** функции f в точке x_0 и обозначают $A = f'(x_0)$

Определение 127. Если существует A, такое, что

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \overline{\overline{o}}(x - x_0)(x \to x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а величину A называют производной функции f в точке x_0 и обозначают $A = f'(x_0)$

Теорема 71. *Определения 126 и 127 эквивалентны.*

Доказательство.
Пусть $A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x}$. Тогда $\frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x} = A + \overline{\overline{o}}(1)$, следовательно $f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = A \cdot \delta x + \overline{\overline{o}}(\delta x)$, □

В обратную сторону, пусть $f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + A \cdot \delta x + \overline{\overline{o}}(\delta x)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{\delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A + \frac{\overline{\overline{o}}(\delta x)}{\delta x}) = A$, □

Лемма 30. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство.
Очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{\overline{o}}(x - x_0)) = f(x_0)$, □

Следствие 29. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0)$.*

Определение 128. Множество M называют **открытым**, если для любого $a \in M$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что $U_\varepsilon(a) \subset M$.

Определение 129. Пусть множество M открыто и f дифференцируема во всех его точках Тогда говорят, что f дифференцируема на M и обозначают $f \in \mathcal{D}(M)$.

Для нас также важен случай, когда надо рассматривать производную функции, определенной на отрезке (который, очевидно, не является открытым множеством). Для этого понадобятся следующие определения:

Определение 130. Если предел $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ существует, то говорят, что функция $f(x)$ **дифференцируема справа** в точке x_0 и называют этот предел **правой производной** функции $f(x)$ в точке x_0. Аналогично, если предел $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ существует, то говорят, что функция $f(x)$ **дифференцируема слева** в точке x_0 и называют этот предел **левой производной** функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 131. Если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$ дифференцируема на (a,b), имеет производную справа в точке a и производную слева в точке b, то говорят, что f **дифференцируема на отрезке** $[a,b]$ и обозначают $f\in\mathcal{D}[a,b]$.

15.2.1 Правила дифференцирования.

Рассмотрим правила нахождения производных:

Теорема 72 (Арифметические свойства производной)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x. Тогда*

1. *Если C — константа, то $(Cf(x))'=Cf'(x)$.*
2. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$;
3. $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$;
4. $(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$;
5. *Если $g(x)\neq 0$, то $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

Доказательство.
Пусть $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)$; $g(x+\Delta x)=g(x)+g'(x)\cdot\Delta x+$ $+\overline{\overline{o}}(\Delta x)$. Правила 1, 2 и 3 очевидны. Докажем правило 4. Рассмотрим

$$f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)=(f(x)+f'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x))\cdot(g(x)+g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x))=$$
$$=f(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)\cdot\Delta x+f'(x)g(x)\cdot\Delta x+f'(x)g'(x)\cdot\Delta x^2+$$
$$+(f(x)+f'(x)\Delta x)\cdot\overline{\overline{o}}(\Delta x)+\overline{\overline{o}}(\Delta x)\cdot(g(x)+g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)).\quad(15.2.1)$$

Очевидно $f'(x)g'(x)\cdot\Delta x^2=\overline{\overline{o}}(\Delta x)(\Delta x\to 0)$. Кроме того, из ограниченности функций $f(x+\Delta x)$ и $g(x+\Delta x)$ вытекает, что

$$(f(x)+f'(x)\Delta x)\cdot\overline{\overline{o}}(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\Delta x)(\text{ при }\Delta x\to 0)$$

и

$$\overline{\overline{o}}(\Delta x)\cdot(g(x)+g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x))=\overline{\overline{o}}(\Delta x)(\text{ при }\Delta x\to 0).$$

Следовательно, из равенства 15.2.1 вытекает $f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)=f(x)\cdot g(x)+$ $+(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)(\Delta x\to 0)$, $\square$

Для доказательства свойства 5 рассмотрим предел: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$. Преобразуем выражение:

$$\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}=$$
$$=\frac{\big(f(x)+f'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)\big)\cdot g(x)-f(x)\cdot\big(g(x)+g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)\big)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}=$$
$$=\frac{(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\overline{\overline{o}}(\Delta x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))\overline{\overline{o}}(1)\cdot g(x)-f(x)\cdot\overline{\overline{o}}(1)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}=$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

□

Теорема 73 (Производная сложной функции). *Пусть $g(x)$ дифференцируема в точке x, а $f(y)$ дифференцируема в $y=g(x)$. Тогда функция $h(x)=f(g(x))$ — их композиция дифференцируема в точке x и ее производная равна $h'(x)=f'(y)\cdot g'(x)$.*

Доказательство.
Обозначим $\Delta y=g(x+\Delta x)-g(x)=g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x)$. Тогда

$$f(y+\Delta y)=f(y)+f'(y)\cdot\Delta y+\overline{\overline{o}}(\Delta y)=f(y)+f'(y)\cdot(g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x))+$$
$$+\overline{\overline{o}}(g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x))=f(y)+f'(y)g'(x)\cdot\Delta x+\overline{\overline{o}}(\Delta x),$$

□

Следствие 30. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x, тогда*

$$\big(f(kx+b)\big)'=k\cdot f'(kx+b).$$

Доказательство.
Действительно, $k(x+\Delta x)+b=kx+b+k\cdot\Delta x$, но $(kx+b)'=k$. Следовательно, $\big(f(kx+b)\big)'=f'(kx+b)\cdot(kx+b)'=k\cdot f'(kx+b)$, □

Теорема 74 (Производная обратной функции). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x и производная не равна 0. Пусть $g(y)=f^{-1}(y)$ — функция, обратная к $f(x)$. Тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y=f(x)$, и ее производная равна $g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}$.*

Доказательство.
Очевидно, $x' = 1$. Применив к тождеству $g(f(x)) = x$ теорему о производной сложной функции, получим $g'(y) \cdot f'(x) = 1$, следовательно

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))},$$

□

15.2.2 Производная показательной, логарифмической и степенной функции.

Лемма 31. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доказательство.
Рассмотрим последовательность $a_n = (1+\frac{1}{m_n})^{m_n}$, где $\forall n \in \mathbb{N}\ m_n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$. Действительно, поскольку последовательность $(1+\frac{1}{k})^k$ монотонно возрастает и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+ +\frac{1}{k})^k = e$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого $e - (1+\frac{1}{k_0})^{k_0} < \varepsilon$. Таким образом для некоторого $n_0 = n_0(\varepsilon)$ выполнено $\forall n \geq n_0 (m_n > k_0)$, следовательно,

$$e - (1+\frac{1}{m_n})^{m_n} < e - (1+\frac{1}{k_0})^{k_0} < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

Рассмотрим произвольную последовательность положительных действительных чисел, сходящуюся к нулю: $x_n \to +0$, при $n \to \infty$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$. Обозначим $m_n = [\frac{1}{x_n}]$ — целая часть $\frac{1}{x_n}$. Будем рассматривать те $x_n < 1$, для них выполнено неравенство:

$$0 < m_n \leq \frac{1}{x_n} < m_n + 1$$

Следовательно,

$$(1+\frac{1}{m_n+1})^{m_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < (1+\frac{1}{m_n})^{m_n+1}.$$

Так как $m_n \to +\infty$ при $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{m_n})^{m_n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{m_n})^{m_n}(1+\frac{1}{m_n}) = e \cdot 1 = e$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{m_n+1})^{m_n} = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{m_n+1})^{m_n+1}/(1+\frac{1}{m_n+1})\right) = e.$$

По теореме о «двух милиционерах» $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$, а по определению Гейне одностороннего предела функции в точке $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Рассмотрим произвольную последовательность действительных чисел $x_n \in (0,1)$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Обозначим $y_n = |x_n| = -x_n > 0$, очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0+$. Тогда, по доказанному ранее,

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}(1-y_n)^{-\frac{1}{y_n}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{y_n}{1-y_n})^{\frac{1}{y_n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}+1} = \lim_{n\to\infty}(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}}(1+z_n) = e\cdot 1 = e,$$

так как $0 < z_n = \frac{y_n}{1-y_n} \to 0^+$ при $n\to\infty$. По определению Гейне одностороннего предела функции в точке $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Из существования односторонних пределов $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ вытекает существование предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Лемма 32. *Предел* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ *существует и равен 1.*

Доказательство.

Рассмотрим показательно–степенную функцию $f(x) = \begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ e, & x=0.\end{cases}$.

Эта функция определена и непрерывна на $(-1,+\infty)$, так как на множестве $(-1,0)\bigcup(0,+\infty)$ функция $f(x) = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ представляется в виде композиции непрерывных функций, а непрерывность в нуле следует из леммы 31. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = f(0)$. Поэтому, функция $\ln f(x)$ определена и непрерывна на $(-1,+\infty)$ как композиция непрерывных функций, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln f(0) = \ln e = 1.$$

$\square$

Теорема 75. *Верны следующие правила:*

1. $(e^x)' = e^x$;
2. $(a^x)' = a^x\ln a$;
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
5. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доказательство.
$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$.
$(\log_a x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{x \ln a}$.
$a^x = y \Rightarrow x = \log_a y \Rightarrow x' = 1 = (\log_a y)' = \frac{y'}{y \ln a} \Rightarrow y' = y \ln a$
$\Rightarrow (a^x)' = a^x \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x$.
$(x^\alpha)' = (e^{\ln x^\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

15.3 Производные элементарных функций

Далее приводятся производные некоторых элементарных функций:

1. $C' = 0$;
2. $(e^x)' = e^x$;
3. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$;
4. $\ln' x = \frac{1}{x}$;
5. $\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$;
6. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
7. $\sin' x = \cos x$;
8. $\cos' x = -\sin x$;
9. $\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $\mathrm{ctg}' x = \frac{-1}{\sin^2 x}$;
11. $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $\mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $\mathrm{arcctg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$;

Доказательство.
1. Очевидно.
2. По теореме 70 (о втором замечательном пределе) $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$. Умножив обе части на e^x, получим $e^{x+\Delta x} = e^x + e^X \cdot \Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$, □
3. Вытекает из равенства $a^x = e^{x \ln a}$ и теоремы о производной сложной функции;
4. Функция $\ln y$ является обратной к $y = e^x$. По теореме о производной обратной функции $\ln' y = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$, □
5. Вытекает из тождества $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$;
6. $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x^\alpha)' = \alpha \cdot e^{\alpha \ln x} \cdot \ln' x = \alpha x^{\alpha-1}$, □
7. $\sin(x+\Delta x) = \sin(x) \cdot \cos \Delta x + \sin \Delta x \cdot \cos x = \sin x \cdot (1 + \bar{\bar{o}}(\Delta x)) + \cos x(\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)) = \sin x + \cos x \cdot \Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$, □
8. $\cos(x + \Delta x) = \cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta = \cos x \cdot (1 + \bar{\bar{o}}(\Delta x)) - \sin x(\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)) = \cos x - \sin x \cdot \Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$, □
9. $\mathrm{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
10. $\mathrm{ctg}' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$.
11. По теореме о производной обратной функции:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

12. Воспользуемся тождеством: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\arccos' x = \big(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\big)' = -\arcsin' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13. По теореме о производной обратной функции:

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\cos^{-2}(\operatorname{arctg} x)}.$$

Воспользуемся тем, что $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \cos^{-2}\alpha$. Тогда

$$\frac{1}{\cos^{-2}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg})} = \frac{1}{1+x^2},$$

14. Воспользуемся тождеством: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\operatorname{arcctg}' x = \big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\big)' = -\operatorname{arctg}' x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

15.4 Свойства производной. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

Лемма 33. *Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (неубывает) на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на нем, то ее производная $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in [a,b]$.*

Доказательство.
Пусть функция $f(x)$ неубывает на $[a,b]$, тогда $\begin{cases} f(x+\Delta x) \geq f(x_0), & \text{при } \Delta x > 0; \\ f(x+\Delta x) \leq f(x_0), & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$.
В любом случае, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, следовательно, по теореме 39 (о предельном переходе в неравенствах) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, □

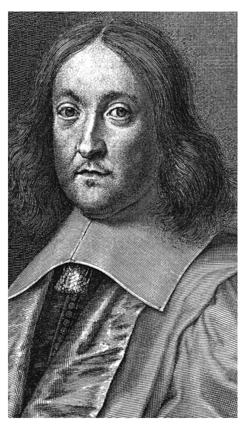


Рис. 15.3: П.Ферма(1601–1665)

Лемма 34. *Если функция $f(x)$ монотонно убывает (невозрастает) на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на нем, то ее производная $f'(x) \leq 0$ при всех $x \in [a,b]$.*

Доказательство.
Предоставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема 76 (Ферма). *Пусть функция $f(x)$ принимает максимальное (минимальное) на отрезке $[a,b]$ значение в точке $x_0 \in (a,b)$, т.е. $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0)$ (соответственно $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0)$) и пусть $f(x)$ дифференцируема в этой точке. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Замечание. Обратите внимание, что $x_0 \in (a,b)$ а не $[a,b]$. Если x_0 совпадает с одним из концов отрезка $[a,b]$, то это не обязательно верно. Например, максимум функции $f(x) = x$ на отрезке $[0,1]$ достигается в точке $x = 1$, но производная везде равна 1 и в ноль не обращается.

Доказательство.
Пусть x_0 — точка максимума, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0)$. Рассмотрим

$$A = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Очевидно, $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, следовательно по теореме 39 (о предельном переходе в неравенствах) $A \geq 0$. С другой стороны

$$B = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

А поскольку предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (собственно производная) существует, то он должен быть равен 0, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл состоит в том, что в точке минимума или максимума касательная к графику функции (если, конечно, она существует) горизонтальна.

Упражнение 283. Доказать теорему Ферма для случая, когда x_0 — точка минимума.

Теорема 77 (Ролль). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках отрезка $[a,b]$ и пусть $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $x_0 \in (a,b)$, такая, что $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство.
Если $f(x)$ — константа, то утверждение очевидно. Пусть теперь функция $f(x)$ принимает значение, отличное от $f(a) = f(b)$ хотя бы в одной точке x_1. Допустим $f(x_1) > f(a) = f(b)$ (если $f(x_1) < f(a) = f(b)$, то доказательство аналогично).

По лемме **??** функция $f(x)$ непрерывна, следовательно, по теореме 50, она принимает в некоторой точке x_0 максимальное значение $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0) > f(a) = f(b)$, причем x_0, очевидно, не совпадает с концами отрезка $[a,b]$. Тогда, по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$, □

Теорема 78 (Лагранжа). *Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $x_0 \in (a,b)$, такая, что $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.*

Доказательство.

Рассмотрим функцию $g(x) = x \cdot (f(a) - f(b)) + (b-a)f(x)$. Очевидно, $g(a) = a \cdot f(a) - a \cdot f(b) + b \cdot f(a) - a \cdot f(a) = b \cdot f(a) - a \cdot f(b)$, $g(b) = b \cdot f(a) - b \cdot f(b) + b \cdot f(b) - a \cdot f(b) = b \cdot f(a) - a \cdot f(b)$, а значит, по теореме Ролля, найдется точка $x_0 \in (a,b)$, такая, что $g'(x_0) = f(a) - f(b) + (b-a)f'(x_0) = 0$, т.е. $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$, $\square$

Геометрический смысл этой теоремы таков: Для каждой хорды $[AB]$ найдется параллельная ей касательная.

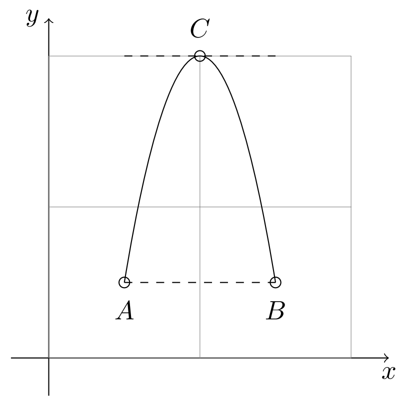


Рис. 15.4: Теорема Ролля

Теорема 79 (Коши)**.** *Пусть* $f(x), g(x) \in \mathcal{C}[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b)$ *и* $\forall x \in (a,b)(g'(x) \neq 0)$. *Тогда существует* $x_0 \in (a,b)$ *такое, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Доказательство.
Обозначим $\Delta f = f(b) - f(a)$, $\Delta g = g(b) - g(a)$ и рассмотрим функцию

$$h(x) = \Delta f \cdot g(x) - \Delta g \cdot f(x).$$

Поскольку $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$ (проверьте это!), то по теореме Ролля найдется $x_0 \in (a,b)$, для которого $h'(x_0) = \Delta f \cdot g'(x_0) - \Delta g \cdot f'(x_0) = 0$, а, следовательно, $\Delta f \cdot g'(x_0) = \Delta g \cdot f'(x_0)$. Разделив на $g'(x_0) \neq 0$, получим $\frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, $\square$

15.5 Неравенства Юнга, Гёльдера, Коши–Буняковского.

Следствие 31 (Неравенство Юнга)**.** *Пусть заданы положительные числа* $a, b > 0$, *такие, что* $a + b = 1$. *Тогда при всех* $x > 0$ *выполнено неравенство* $x^a \leq ax + b$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^a - ax$, очевидно, $f(1) = 1 - a = b$ и $f'(x) = ax^{a-1} - a = ax^{-b} - a = a\left(\frac{1}{x^b} - 1\right)$. Выберем произвольное $x > 0$ и рассмотрим два возможных случая:

1. Пусть $x > 1$, тогда, по теореме Лагранжа, существует $x_0 \in [1, x]$, такое, что $f(x) - b = f'(x_0)(x-1) = a(\frac{1}{x_0^b} - 1)(x-1)$. Поскольку $x_0 > 1$, то $(\frac{1}{x_0^b} - 1) < 0$, следовательно, $f(x) - b < 0$, т.е. $f(x) < b$.

2. Пусть теперь $0 < x < 1$, тогда существует $x_0 \in [x, 1]$ такое, что $b - f(x) = f'(x_0)(1-x) = (ax_0^{a-1} - a)(1-x)$. Поскольку $0 < x_0 < 1$, то $(\frac{1}{x_0^b} - 1) > 0$, следовательно $b - f(x) > 0$ и, опять, $f(x) < b$.

Таким образом, при всех $x > 0$, $x \neq 1$ значение функции $f(x)$ меньше b, $\square$

Следствие 32 (Неравенство Гёльдера). *Пусть числа $p, q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для произвольных $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$ выполнено неравенство:*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{1/q}$$

Доказательство.
Обозначим $u_i = \frac{a_i^p}{a_1^p + \ldots + a_n^p}$ и $v_i = \frac{b_i^q}{b_1^q + \ldots + b_n^q}$, $i = 1, ..., n$ (считаем, что не все $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ равны нулю, иначе неравенство тривиально). Взяв $x = \frac{u_i}{v_i}$, $a = \frac{1}{p}$ и $b = \frac{1}{q}$ запишем неравенство Юнга в виде: $\left(\frac{u_i}{v_i}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{u_i}{v_i} + \frac{1}{q}$. Умножая на v_i обе части неравенства и преобразовывая (напомним, что $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$), получим

$$u_i^{1/p} \cdot v_i^{1/q} \leq \frac{u_i}{p} + \frac{v_i}{q}.$$

Просуммируем по всем i от 1 до n и упростим:

$$u_1^{1/p} \cdot v_1^{1/q} + u_2^{1/p} \cdot v_2^{1/q} + \ldots + u_n^{1/p} \cdot v_n^{1/q} \leq 1 \qquad (15.5.1)$$

(Обратите внимание, что $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$). Подставив в 15.5.1 выражения для u_i и v_i, имеем

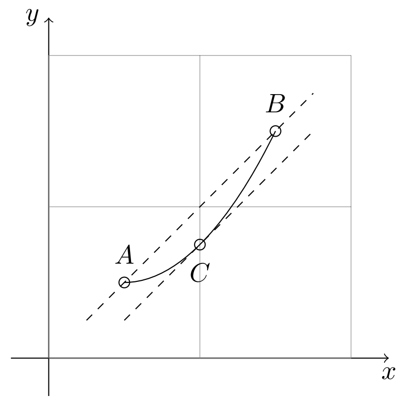


Рис. 15.5: Теорема Лагранжа

$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{(a_1^p + \ldots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + \ldots + b_n^q)^{1/q}} \leq 1,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

Замечание. Частным случаем неравенства Гёльдера при $p = q = 2$ является неравенство Коши–Буняковского:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Оно утверждает, что скалярное произведение векторов в n–мерном пространстве не превосходит произведения их длин.

Упражнение 284. При каких условиях на и неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство?

Следствие 33. *Если α, β, γ — углы треугольника, то*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Доказательство.
Зафиксируем α и обозначим $\phi = \frac{\pi-\alpha}{2}$, $\beta = \phi - x$ и $\gamma = \phi + x$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\alpha + \sin(\phi - x) + \sin(\phi + x)$. Ее производная равна $f'(x) =$ $= -\cos(\phi - x) + \cos(\phi + x) = -2\sin\phi\sin x$. Заметим, что $f'(x) < 0$ при $x > 0$, и, наоборот $f'(x) > 0$ при $x < 0$. Следовательно $f(x) \le f(0) = \sin\alpha + 2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$.

Будем теперь варьировать α. Рассмотрим функцию $g(x) = \sin x + 2\sin\frac{\pi-x}{2}$. Ее производная равна $g'(x) = \cos x - \cos\frac{\pi-x}{2} = -2\sin\frac{x+\pi}{4}\sin\frac{3x-\pi}{4}$. Заметим, что $g'(x) < 0$ при $x > \frac{\pi}{3}$, и, наоборот, $g'(x) > 0$ при $x < \frac{\pi}{3}$. Значит $g(x) \le g(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, □

15.6 Правила Лопиталя.

Теорема 80 (Первое правило Лопиталя)**.** *Пусть $a \in \mathbb{R}$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ и не равны 0 во всех ее точках. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен A.*

Доказательство.
Поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, будем считать $f(a) = g(a) = 0$, при этом функции f и g будут непрерывны в a. Из определения для предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ вытекает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для каждого $x_0 \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено неравенство $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - A| < \varepsilon$. Выберем произвольное $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, тогда $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, где $x_0 \in$ $\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ — некоторое число. Тогда $|\frac{f(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A$, □

Теорема 81 (Вторoе правило Лопиталя)**.** *Пусть $a \in \mathbb{R}$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ и не равны 0 во всех ее точках. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен A.*

Доказательство.
(Точнее идея доказательства) Основывается на следующей теореме:

Теорема 82 (Теорема Штольца)**.** *Пусть последовательность y_n монотонно возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ существует и равен тому же числу A.*

Доказательство.
По определению предела можно записать $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A + \alpha_n$, где α_n — б.м.п. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Найдется $N = N(\varepsilon/2)$, такое что при всех

$n > N$ $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Домножив на знаменатель получим: $x_{n+1} - x_n = A(y_{n+1} - y_n) + \alpha_n \cdot (y_{n+1} - y_n)$. Зафиксируем $n_0 > N$ и просуммируем эти равенства по n от n_0 до $m-1$, получим

$$x_m - x_{n_0} = A(y_m - y_{n_0}) + \alpha_{n_0}(y_{n_0+1} - y_{n_0}) + \ldots + \alpha_{m-1}(y_m - y_{m-1}).$$

Перегруппируем слагаемые

$$x_m - A \cdot y_m = x_{n_0} - A \cdot y_{n_0} + \alpha_{n_0}(y_{n_0+1} - y_{n_0}) + \ldots + \alpha_{m-1}(y_m - y_{m-1}),$$

и применим неравенство треугольника для модулей:

$$\begin{aligned}|x_m - A \cdot y_m| \le |x_{n_0} - A \cdot y_{n_0}| + |\alpha_{n_0}| \cdot |y_{n_0+1} - y_{n_0}| + \ldots \\ \ldots + |\alpha_{m-1}| \cdot |y_m - y_{m-1}| \le |x_{n_0} - A \cdot y_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y_{n_0+1} - y_{n_0}) + \ldots \\ \ldots + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y_m - y_{m-1}) = |x_{n_0} - A \cdot y_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y_m - y_{n_0}).\end{aligned}$$

Здесь модули $|y_{k+1} - y_k|$ раскрываются с положительным знаком, поскольку y_n — возрастающая последовательность. Разделим теперь обе части неравенства на y_m

$$\left|\frac{x_m}{y_m} - A\right| \le \frac{|x_{n_0} - A \cdot y_{n_0}|}{y_m} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1 - \frac{y_{n_0}}{y_m}).$$

Предел правой части при $m \to \infty$ равен $\frac{\varepsilon}{2}$, следовательно, начиная с некоторого M_0 ее величина меньше ε, то есть $|\frac{x_m}{y_m} - A| < \varepsilon$, $\square$

Доказательство (2–го правила Лопиталя). Выберем произвольную последовательность $x_n \to a$, так, что $y_n = g(x_n)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (последнее следует из условия теоремы). По теореме Коши на интервале (x_n, x_{n+1}) или (x_{n+1}, x_n), найдется точка c_n, такая, что $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n))} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ Следовательно, поскольку $c_n \to a$, то предел этого выражения равен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n))} = A$. По теореме Штольца имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$, а, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $\square$

Глава 16

Кратные производные. Формула Лейбница. Выпуклость

16.1 Кратные производные.

Определение 132. Как мы уже видели производная некоторой функции $f(x)$ (дифференцируемой) тоже является функцией, значит от неё опять можно взять производную. Эта функция называется **вторая производная** и обозначается $f''(x)$ или $f^{(2)}$. Аналогично определяется третья ($f'''(x) = f^{(3)}$), четвертая ($f''''(x) = f^{(4)}$), ..., n–я производная ($f^{(n)}$). Подразумевается, что f имеет $n-1$–ю производную в некоторой окрестности точки x, и эта $n-1$–я производная дифференцируема в точке x.

Определение 133. Множество функций, имеющих n–ю производную во всех точках открытого множества M обозначается $\mathcal{D}^n(M)$.

Определение 134. Множество функций, из $\mathcal{D}^n(M)$, имеющих непрерывную n–ю производную во всех точках открытого множества M обозначается $\mathcal{C}^n(M)$.

Замечание Когда множество M не является открытым, например, в случае $M = [a,b]$ удобно использовать такие же обозначения $\mathcal{D}^n[a,b]$ и $\mathcal{C}^n[a,b]$, понимая под непрерывностью/дифференцируемостью непрерывность/дифференцируемость слева или справа в соответствующих концах отрезка.

Для некоторых функций можно выписать явные значения n–й производной:

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha - n}$.
- $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n \cdot a^x$.

- $\log_a x^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{\ln^n a \cdot x^n}$.
- $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x, & \text{при } n = 2k; \\ (-1)^k \cdot \cos x, & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$
- $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x, & \text{при } n = 2k; \\ (-1)^{k+1} \cdot \sin x, & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$

Очевидно, кратная производная от суммы или разности функций будет суммой или разностью соответствующих кратных производных. Для нахождения кратных производных произведения существует следующая формула:

Теорема 83 (Формула Лейбница)**.** *Пусть* $f(x), g(x) \in D^n(M)$, *тогда*

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

где подразумевается, что $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$.

Доказательство.
Будем вести индукцией по n.

- База индукции: Для $n = 1$ получаем $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ правило дифференцирования произведения.
- Шаг индукции: По предположению индукции $(f(x) \cdot g(x))^{(n-1)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) g^{(n-k-1)}(x)$.

  Возьмем производную от обеих частей:

  $$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \big(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k-1)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\big),$$

  откуда имеем:

  $$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

  следовательно,

  $$(f(x) \cdot g(x))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\right) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

$\square$

16.2 Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Неравенство Йенсена.

Одним из применений кратных (точнее вторых) производных является исследование функций на выпуклость.

Определение 135. Функция $f(x)$, определённая на промежутке (отрезке, интервале, луче, всей прямой) и принимающая действительные значения, называется **выпуклой вниз**, если её график на любом отрезке $[a, b] \subset D_f$, лежит не выше хорды $(a, f(a))$—$(b, f(b))$ (см рис. 16.1). Аналогично определяется понятие функции **выпуклой вверх** — это функция, график которой лежит не ниже хорды (см рис. 16.2).

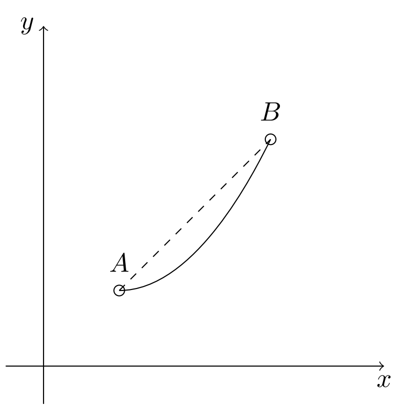


Рис. 16.1: Функция выпукла вниз

Лемма 35. *Пусть $f(x)$ выпукла вниз на $[a, b]$. Тогда для любых $p, q \geq 0$, таких, что $p + q = 1$ выполнено неравенство:*

$$f(pa + qb) \leq pf(a) + qf(b).$$

Доказательство.
Рассмотрим точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$. Очевидно, точка $C(pa + qb, pf(a) + qf(b))$ лежит на хорде $[AB]$, следовательно, график лежит ниже этой точки, а значит $f(pa + qb) \leq pf(a) + qf(b)$, $\square$

Лемма 36. *Пусть $f(x)$ выпукла вверх на $[a, b]$. Тогда для любых $p, q \geq 0$, таких, что $p + q = 1$ выполнено неравенство:*

$$f(pa + qb) \geq pf(a) + qf(b).$$

Доказательство.
Аналогично. Предоставляется читателю в качестве упражнения.

Лемма 37. *Пусть $f \in \mathcal{C}[a,b]$ и для любых $a_1, b_1 \in [a,b]$ выполнено неравенство*

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \leq \frac{f(a_1)+f(b_1)}{2}.$$

Тогда f выпукла вниз на отрезке $[a,b]$.

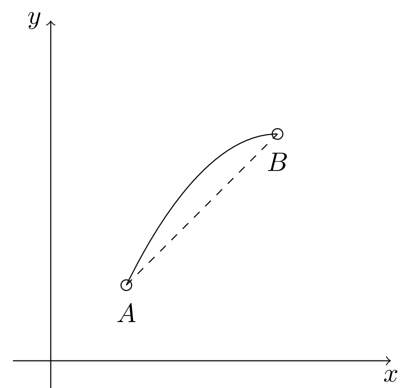


Рис. 16.2: Функция выпукла вверх

Замечание: Таким образом для проверки выпуклости непрерывной функции достаточно проверять неравенство только в середине отрезка. Для разрывных функций это, вообще говоря, неверно, например, можно посмотреть функцию Дирихле.

Доказательство.
Выберем произвольные $a_1, b_1 \in$ $\in [a,b]$ и покажем, что график функции $y = f(x)$ лежит не выше хорды $[AB]$ где $A(a_1, f(a_1))$ и $B(b_1, f(b_1))$. Для удобства выпишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$l(x) = f(a_1) + \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \cdot (y - a_1).$$

Выберем произвольное $\xi \in [a_1, b_1]$. Будем опять строить последовательность стягивающихся отрезков: Пусть $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если $\xi \geq c_1$, то выберем $a_2 =$ $= c_1$, $b_2 = b_1$, в противном случае выберем $a_2 = a_1$ $b_2 = c_1$. Потом берем $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$, и.т.д.

Докажем что $f(c_n) \leq l(c_n)$ методом математической индукции. База вытекает из условия теоремы. Шаг индукции. Пусть $f(a_n) \leq l(a_n)$ и $f(b_n) \leq$ $\leq l(b_n)$, сложив эти неравенства получим

$$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq \frac{f(a_n)+f(b_n)}{2} \leq \frac{l(a_n)+l(b_n)}{2} = l(c_n).$$

Таким образом $f(c_n) \leq l(c_n)$.

Последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ стягивается к точке ξ, следовательно, взяв предел при $n \to \infty$ получим $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \xi$. Из непрерывности $f(x)$ и $l(x)$ вытекает $f(\xi) \leq l(\xi)$, $\square$

Лемма 38. *Пусть $f \in \mathcal{C}[a,b]$ и для любых $a_1, b_1 \in [a,b]$ выполнено неравенство $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \geq \frac{f(a_1)+f(b_1)}{2}$. Тогда f выпукла вверх на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство.
Аналогично. Предоставляется в качестве упражнения.

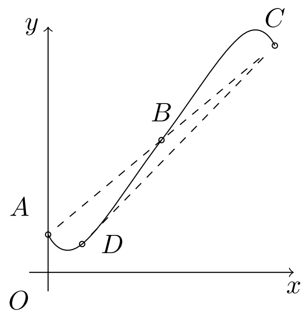


Рис. 16.3: Если прямая пересекает график в 3 точках, то он не может быть выпуклым.

Лемма 39. *Пусть $f(x)$ выпукла вниз на $[a,b]$. Тогда любая прямая пересекает график $y=f(X)$ либо в двух точках, либо по некоторому отрезку.*

Доказательство.
Предположим обратное, что некоторая прямая l пересекает график в трех точках A, B и C, причем на отрезке $[AC]$ есть точка, не лежащая на графике функции (см. рис. 16.3). Не ограничивая общности, можно считать, что она лежит на $[AB]$. Но тогда точка $D(x_0, f(x_0))$ должна быть расположена ниже хорды AC (из выпуклости).

С другой стороны, точка B должна лежать ниже хорды $[AD]$. Противоречие. □

Теорема 84. *Если при некотором $\varepsilon > 0$ функция $f(x)$ выпукла в окрестности $U_\varepsilon(x_0)$, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство.
Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что f выпукла вниз. Докажем сначала, что функция непрерывна справа в точке x_0.

Рассмотрим произвольную точку $x \in (x_0, x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ и обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Пусть $x_1 = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, $x_2 = x_0 - \frac{\varepsilon}{2}$, рассмотрим точки, расположенные на графике функции: $X(x, f(x))$, $X_0(x_0, f(x_0))$, $X_1(x_1, f(x_1))$ и $X_2(x_2, f(x_2))$.

Из выпуклости следует, что точка X_0 лежит ниже хорды XX_1, следовательно, точка X лежит выше прямой X_0X_1 (см. Рис. 16.2).

С другой стороны, точка X лежит ниже хорды X_0X_2 (тоже из выпуклости). Обозначим через k_1 и k_2 угловые коэффициенты прямых X_0X_1 и X_0X_2, соответственно. Тогда, очевидно,

$$k_1\Delta x < \Delta f < k_2\Delta x.$$

Устремляя $\Delta x \to +0$, получим (по лемме о двух милиционерах), что $\Delta f \to 0$, следовательно, $f(x) \to f(x_0)$, т.е. $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0.

Аналогично доказывается, что $f(x)$ непрерывна слева. Таким образом, $f(x)$ непрерывна в точке x_0. □

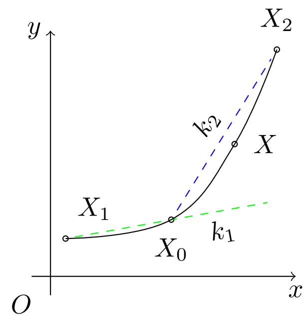


Рис. 16.4: Произвольная точка на дуге $X_0 \smile X_2$ лежит выше прямой X_1X_0.

Теорема 85. *Если при некотором $\varepsilon > 0$ функция $f(x)$ выпукла в окрестности $U_\varepsilon(x_0)$, то она обладает правой и левой производными в точке x_0*[1].

Доказательство.
Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \downarrow +0$. Построим для каждого n прямые $X_0(n)X_1(n)$ и $X_0(n)X_2(n)$ как в доказательстве предыдущей теоремы. Несложно заметить, что, поскольку точка $X_2(n+1)$ лежит ниже хорды $X_0X_2(n)$, то последовательность угловых коэффициентов $k_2(n)$ является убывающей. С другой стороны она ограничена снизу величиной $k_1(1)$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} k_2(n) = K$. Эта величина, очевидно, является правой производной в точке x_0.

Аналогично доказывается существование левой производной в точке x_0.

Теорема 86. *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}^2[a,b]$ и для любого $x \in [a,b]$ выполнено неравенство $f''(x) \geq 0$. Тогда $f(x)$ является выпуклой вниз на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство.
Выберем произвольные $[a_1, b_1] \subset [a,b]$, пусть c_1 — середина отрезка $[a_1, b_1]$, $d_1 = b_! - a_1$ — его длина. Рассмотрим разность $D = f(a_1) + f(b_1) - 2f(c_1) = \big(f(b_1) - f(c_1)\big) - \big(f(c_1) - f(a_1)\big)$. Преобразовывая и применяя теорему Лагранжа, получим:

$$D = \big(f(b_1) - f(c_1)\big) - \big(f(c_1 - f(a_1)\big) = \\ = f'(\xi_2)(b_1 - c_1) - f'(\xi_1)(c_1 - a_1) = \frac{d}{2} \cdot \big(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\big),$$

где $\xi_1 \in [a_1, c_1]$, и $\xi_2 \in [c_1, b_1]$. Применив теорему теорему Лагранжа ещё раз, получим $D = f''(\zeta) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{d_1}{2} \geq 0$, поскольку $\xi_1 \leq \xi_2$. Таким образом, $f(a_1) + f(b_1) \geq 2f(\frac{a_1+b_1}{2})$, следовательно по лемме 37 график функции является выпуклым вниз, □

[1] Из выпуклости, вообще говоря не следует дифференцируемость. Так, например, $f(x) = |x|$, очевидно, выпукла вниз, но производной в точке $x_0 = 0$ не существует.

Теорема 87. *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}^2[a,b]$ и для любого $x \in [a,b]$ выполнено неравенство $f''(x) \leq 0$. Тогда график $f(x)$ является выпуклым вверх.*

Доказательство.
Упражнение.

Теорема 88. *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}^2[a,b]$, $f''(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ и график $f(x)$ является выпуклым вниз. Тогда для любого $x \in [a,b]$ $f''(x) \geq 0$.*

Доказательство.
Предположим обратное. Пусть существует точка $x_0 \in [a,b]$, в которой $f''(x_0) < < 0$. Тогда, из непрерывности второй производной вытекает, это неравенство выполнено для всех x из некоторой ε–окрестности точки x_0. Выберем $a_1, b_1 \in U_\varepsilon(x_0)$, так, что $a_1 < b_1$, пусть $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ — середина отрезка $[a_1, b_1]$, $d_1 = b_1 - a_1$ — его длина.

Из леммы 35 (с $p = q = \frac{1}{2}$) вытекает, что разность

$$D = f(a_1) + f(b_1) - 2f(_1) \geq 0.$$

Преобразовывая и применяя теорему Лагранжа, получим:

$$D = \big(f(b_1) - f(c_1)\big) - \big(f(c_1 - f(a_1)\big) = \\ = f'(\xi_2)(b_1 - c_1) - f'(\xi_1)(c_1 - a_1) = \frac{d}{2} \cdot \big(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)\big),$$

где $\xi_1 \in [a_1, c_1]$, и $\xi_2 \in [c_1, b_1]$. Применив теорему теорему Лагранжа ещё раз, получим $D = f''(\zeta) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \cdot \frac{d_1}{2} \geq 0$, поскольку $\xi_1 \geq \xi_2$. Таким образом, $\frac{f(a_1)+f(b_1)}{2} \geq f(c_1)$, следовательно, по лемме 37 график функции является выпуклым вниз, □

Теорема 89. *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}^2[a,b]$, $f''(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ и график $f(x)$ является выпуклым вверх. Тогда для любого $x \in [a,b]$ $f''(x) \leq 0$.*

Доказательство.
Предоставляется читателю в качестве упражнения.

Эти теоремы наглядно показывают, что для дважды непрерывно дифференцируемых функций выпуклость графика однозначно связана со знаком второй производной. Таким образом зная знак функции, ее первой и второй производной, можно судить о форме графика функции на данном промежутке.

Теорема 90 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}^2[a,b]$ выпукла вниз на $[a,b]$ Пусть выбраны точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ и числа $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0$ такие, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$. Тогда*

$$m_1 \cdot f(x_1) + m_2 \cdot f(x_2) + \ldots + m_n \cdot f(x_n) \geq f(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n).$$

Замечание 1. Несложно заметить, что в случае $n = 2$ теорема просто превращается в лемму 35. Таким образом, неравенство Йенсена является обобщением этой леммы.

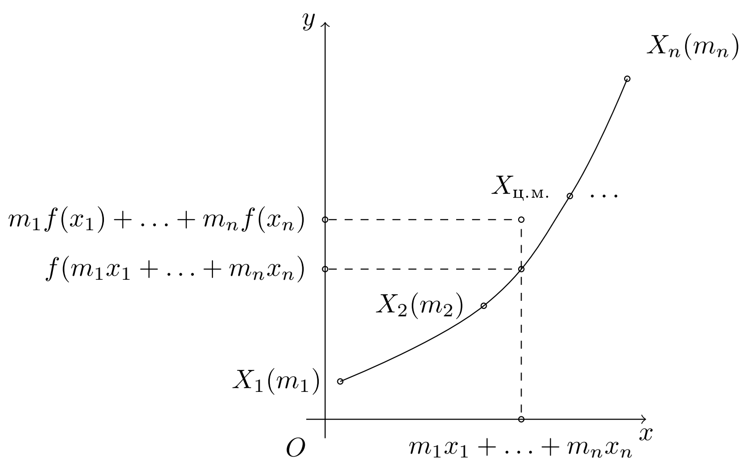


Рис. 16.5: Неравенство Йенсена: центр масс лежит выше графика.

Замечание 2. Те, кто увлекается физикой, легко поймут физический смысл неравенства Йенсена. Он означает, что если взять n точек с массами m_1, ... m_n на графике функции $y = f(x)$, то центр масс этой системы точек будет лежать выше графика (см. рис 16.5). С точки зрения физики это очевидно, а с точки зрения математики придется доказывать.

Доказательство.

Будем вести индукцией по n.

- База индукции. При $n = 2$ — лемма 35.

- Шаг индукции. Допустим, что теорема доказана в случае $n-1$ и докажем для n. Пусть $\mu = m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}$ и $m'_i = \frac{m_i}{\mu}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Очевидно, $m'_1 + \ldots + m'_{n-1} = 1$. Обозначим $x'_1 = m'_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m'_{n-1} x_{n-1}$. Тогда, по предположению индукции:

$$m'_1 \cdot f(x_1) + m'_2 \cdot f(x_2) + \ldots + m'_{n-1} \cdot f(x_n) \geq f(x'_1). \tag{16.2.1}$$

Так как, $\mu + m_n = 1$, то по лемме 35 имеем:

$$\mu f(x'_1) + m_n f(x_n) \geq f(\mu x'_1 + m_n x_n) = f(m_1 x_1 + m_2 x + 2 + \ldots + m_n x_n).$$

Подставив это в неравенство 16.2.1, получим:

$$\mu \left(m'_1 \cdot f(x_1) + m'_2 \cdot f(x_2) + \ldots + m'_{n-1} \cdot f(x_n) \right) + m_n f(x_n) \geq \\ \geq f(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n).$$

Поставляя $m'_i = \frac{m_i}{\mu}$, где $i = 1, \ldots, n-1$, получаем в итоге:

$$m_1 \cdot f(x_1) + m_2 \cdot f(x_2) + \ldots + m_n \cdot f(x_n) \geq \\ \geq f(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n).$$

□

Теорема 91 (Неравенство Йенсена для выпуклой вверх функции)**.** *Пусть $f(x) \in \mathcal{D}^2[a,b]$ выпукла вверх на $[a,b]$ Пусть выбраны точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ $\in [a,b]$ и числа $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 0$ такие, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$. Тогда*

$$m_1 \cdot f(x_1) + m_2 \cdot f(x_2) + \ldots + m_n \cdot f(x_n) \leq f(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n).$$

Следствие 34 (Неравенство Коши)**.** *Среднее геометрическое нескольких положительных чисел не превосходит их среднего геометрического.*

Доказательство.
Выберем в качестве $f(x) = \ln x$. Поскольку $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$, то график $y = \ln x$ будет выпуклым вверх. Применим неравенство Йенсена с одинаковыми массами $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = \frac{1}{n}$, получим

$$\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n) \leq \ln\left(\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\right).$$

Преобразуем $\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n) = \ln(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n})$ и воспользуемся тем, что $\ln x$ есть монотонно возрастающая функция:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

□

Упражнение 285. Доказать, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Теорема 92 (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Для любых чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ выполнено неравенство*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

Доказательство.
Докажем сначала неравенство для случая, когда $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$ Функция $f(x) = x^2$ является выпуклой вниз. Обозначим $M = b_1^2 + \ldots + b_n^2$ выберем $m_i = \frac{b_i^2}{M}$ и $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ и применим неравенство Йенсена. Получим:

$$m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \ldots + m_n \cdot x_n^2 \geq (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n)^2.$$

Пользуясь тем, что $m_i x_i^2 = \frac{a_i^2}{M}$ и $m_i x_i = \frac{a_i b_i}{M}$ преобразуем неравенство к виду

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{M} \geq \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{M}\right)^2.$$

Затем умножим обе части на M^2 и подставляя $M = b_1^2 + \ldots + b_n^2$, получим

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

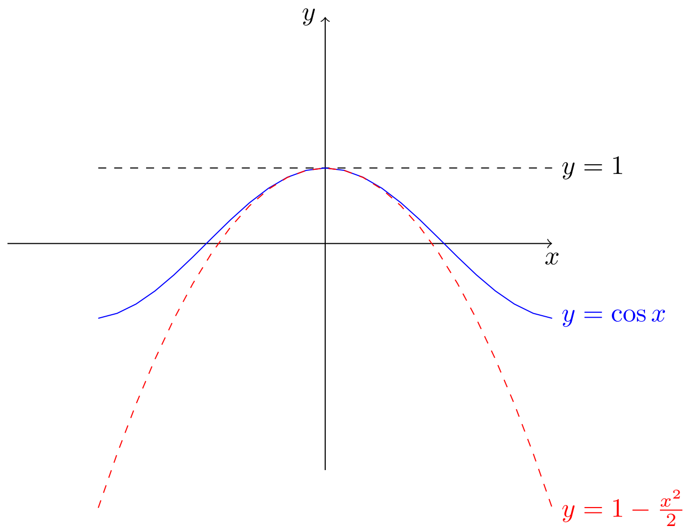


Рис. 16.6: Пример касания 1–го и 3–го порядка.

Для того, чтобы доказать неравенство для произвольных $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ подставим их модули в указанное неравенство, а затем воспользуемся тем, что

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (|a_1||b_1| + |a_2||b_2| + \ldots + |a_n||b_n|)^2.$$

□

16.3 Порядок касания. Круг кривизны, эволюта и эвольвента.

Определение 136. Пусть кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в некоторой точке $x = x_0$ и функции f, g дифференцируемы в этой точке. Тогда **углом между кривыми** называется угол между касательными, проведенными в точке x_0 к этим кривым, т.е. $|\operatorname{arctg}(f'(x_0)) - \operatorname{arctg}(g'(x_0))|$.

Определение 137. Если кривые пересекаются в точке x_0 под углом, равным 0, то говорят, что кривые **касаются** в этой точке.

Определение 138. Говорят, что кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют **касание** n**–го порядка** в точке x_0, если $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, $\ldots^{(n)} f(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, но $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.

Пример. Кривая $y = \cos x$ имеет в точке (0,1) касание 1–го порядка с прямой $y = 1$ и касание 3–го порядка с кривой $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (см. рис. 16.3).

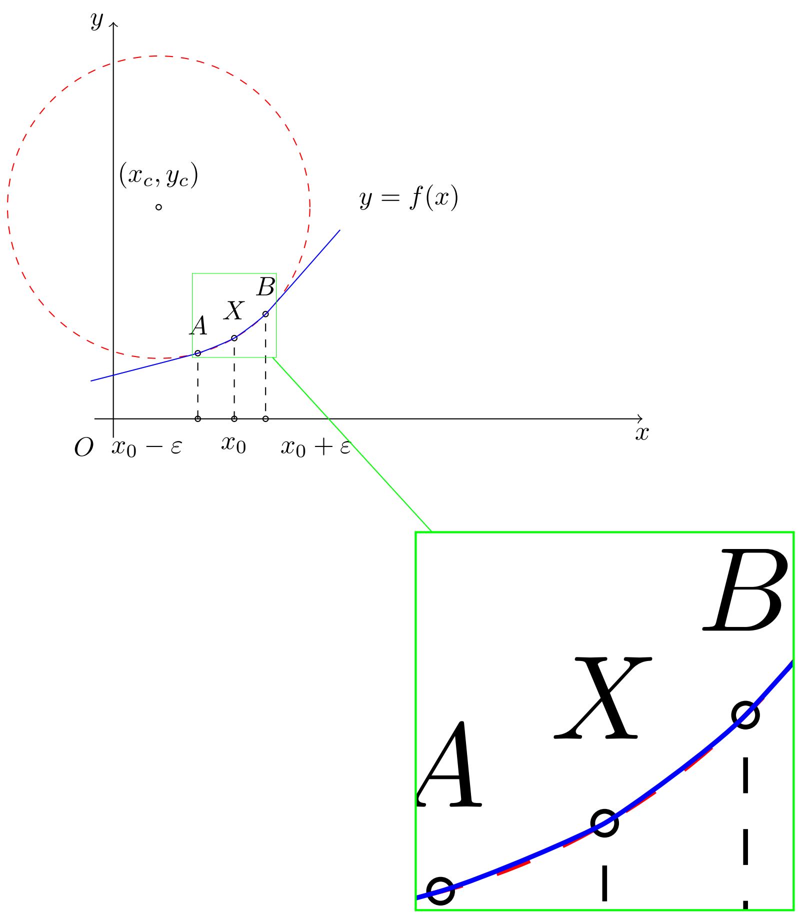


Рис. 16.7: Круг кривизны.

Определение 139. Окружность $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = R^2$, имеющая с данной кривой $y = f(x)$ касание в точке x_0 не ниже 2–го порядка называется **круг кривизны** в этой точке. Точка (x_c, y_c) называется **центром кривизны**, R называется **радиусом кривизны**, а величина $k = \frac{1}{R}$ — **кривизной**. Геометрическое место центров кривизны (x_c, y_c) называется **эволютой** данной кривой.

Теорема 93. *Пусть $f \in \mathcal{D}^2(x_0)$ и $f''(x_0) \neq 0$. Тогда радиус и центр кривизны находятся по формулам (обозначения $y' = f'(x_0)$, $y'' = f''(x_0)$, $c = \sqrt{1+f'(x_0)^2}$:*

- $R = \frac{(\sqrt{1+(y')^2})^3}{|y''|}$;
- $x_c = x_0 - \frac{(1+(y')^2)y'}{y''}$;

- $y_c = y_0 + \frac{1+(y')^2}{y''}$.

Доказательство.
Непосредственно проверяется равенство 1–й и 2–й производной.

Запишем уравнение окружности $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$ и выразим из него $y=f(x)=y_c\pm\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}$. Для определенности выберем знак «+», для «-» доказывается аналогично.

Найдем производные:

$$f'(x)=\frac{-(x-x_c)}{\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}};$$

$$f''(x)=\frac{-\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}-\frac{(x-x_c)^2}{\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}}}{R^2-(x-x_c)^2}.$$

Введем следующие обозначения: $\Delta x = x-x_c$, $\Delta y = y-y_c=\sqrt{R^2-(x-x_c)^2}$, и решим относительно них следующцю систему уравнений:

$$\begin{cases} y' &= \frac{-\Delta x}{\Delta y}; \\ y'' &= \frac{-\Delta y-\frac{\Delta^2 x}{\Delta y}}{\Delta^2 y}. \end{cases}$$

Эта система получена из условия касания 2–го порядка, т.е. равенства первой и второй производных. Выразим из первого уравнения системы $\Delta x = -y'\Delta y$ и подставим во второе уравнение: $y''=-\frac{1+(y')^2}{\Delta y}$, откуда

$$\Delta y = -\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

Тогда

$$\Delta x = -y'\Delta y = \frac{y'(1+(y')^2)}{y''}.$$

Следовательно,

$$R=\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}=\frac{(\sqrt{1+(y')^2})^3}{|y''|}.$$

Подставляя вместо Δx и Δy их значения, получаем формулы для центра и радиуса круга кривизны.

Порядок касания тесно связан с тем, насколько близко проходят кривые в окрестности указанной точки.

Теорема 94. *Пусть при некотором $\varepsilon>0$ функции $f(x), g(x)\in \mathcal{C}^n(U_\varepsilon(x_0))$ и кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют касание порядка n или более в точке x_0. Тогда $f(x)=g(x)+\overline{\overline{o}}\big((x-x_0)^n\big)$ при $x\to x_0$.*

Доказательство.
Рассмотрим отношение $\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n}$ и применим n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)}{n!}=0,$$

поскольку $n-$ые производные непрерывны. □

Доказанное утверждение позволяет получать много полезных эквивалентностей, например:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \overline{\overline{o}}(x^4)$ при $x \to 0$;
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^3)$ при $x \to 0$;
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \overline{\overline{o}}(x)$ при $x \to 0$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \overline{\overline{o}}(x)$ при $x \to 0$;
- $\ln 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)$ при $x \to 0$;
- ... И этот список можно продолжать до бесконечности ...

Для более точной оценки разности потребуется доказать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 40. *Пусть $f(x)$ такова, что $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n)} = 0$, причем $f^{(n+1)} \geq 0$ при всех $x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$ (где $\varepsilon > 0$). Тогда $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$.*

Доказательство.
Доказательство будем вести индукцией по n.

- База индукции: $n = 1$. Выберем произвольное $x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$, по теореме Лагранжа $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)\cdot(x - x_0) \geq 0$, т.к. $f'(\xi) \geq 0$ по условию и $x - x_0 \geq 0$ по выбору точки x.
- Шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $n-1$. Применим его к $f'(x)$, получим, что $f'(x) \geq 0$ на отрезке $[x_0, x_0+\varepsilon]$. Применим базу индукции и получим, что $f(x) \geq 0$ на этом отрезке. □

Лемма 41 (О сравнении функций)**.** *Пусть кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют касание $n-$го порядка в точке x_0, т.е. $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, $\ldots f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, и при этом во всех точках отрезка $[x_0, x_0+\varepsilon]$ выполнено неравенство*

$$f^{(n+1)}(x) \geq g^{(n+1)}(x).$$

Тогда на этом отрезке $f(x) \geq g(x)$.

Доказательство.
Рассмотрим $F(x) = f(x) - g(x)$. Для нее выполнены условия леммы 41, откуда $F(x) \geq 0$, следовательно $f(x) \geq g(x)$. □

Следствие 35. *Пусть кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют касание $n-$го порядка в точке x_0, т.е. $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0)$, $\ldots f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, и при этом во всех точках отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ выполнено неравенство*

$$(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x) \geq (-1)^{n+1} g^{(n+1)}(x).$$

Тогда на этом отрезке $f(x) \geq g(x)$.

Доказательство.
Получается, если применить лемму 41 к функциям $f(2x_0 - x)$ и $f(2x_0 - y)$.

Лемма 42. *Пусть $f(x)$ такова, что $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n)} = 0$, причем $|f^{(n+1)}| \leq A$ при всех $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (где $\varepsilon > 0$). Тогда*

$$|f(x)| \leq A \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

при любых $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Доказательство.
Применим лемму 41 (о сравнении) к функциям $f(x)$ и $g(x) = A \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Получим $f(x) \leq A \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Применив к $-f(x)$ и $g(x)$, получим $-f(x) \leq A \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Следовательно, $|f(x)| \leq |g(x)|$ на $[x_0, x_0 + + \varepsilon]$. Доказательство неравенства на отрезке $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ предоставляется в качестве упражнения. □

Следствие 36 (О приближенных вычислениях)**.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют касание $n-$го порядка в точке x_0, причем $|f^{n+1} - g^{n+1}| \leq A$ на отрезке между точками x_0 и $x_0 \pm \varepsilon$, то $f(x)$ может быть вычислено по приближенной формуле*

$$f(x) \approx g(x) \pm A \cdot \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В качестве примера посмотрим, как можно приближенно вычислить $\sqrt{5}$ при помощи такого приема.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{4+x}$ в точке $x_0 = 0$. В ней $f(x_0) = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{4}$. Легко построить линейную функцию, имеющую касание 1-го порядка: $g_1(x) = 2 + \frac{x}{4}$. Подставляя $x = 1$, получим $f(1) \approx 1.25$. Оценим погрешность — найдем вторую производную $f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot (4+x)^{-3/2}$, очевидно, $|f''| \leq \frac{1}{32}$ на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, погрешность не превосходит $\frac{1}{32} \cdot \frac{1^2}{2!} = \frac{1}{64}$. Это действительно так, на калькуляторе легко посчитать $\sqrt{5} = 2,236\ldots$

Допустим, нас не устраивает и мы хотим получить большую точность. Построим параболу, имеющую второй порядок касания. Находим $f''(x_0) = -\frac{1}{32}$ и рассмотрим функцию $g_2(x) = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64}$. Подставив $x = 1$, получаем $f(1) \approx g(1) = 1.234375$. Какова же погрешность? Найдем третью производную $f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot (4+x)^{-5/2}$, очевидно, $|f''| \leq \frac{3}{256}$ на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, погрешность не превосходит $\frac{3}{256} \cdot \frac{1^3}{3!} = \frac{1}{512} < 0.002$.

Итак, вообще говоря, чем больше порядок касания, тем большую точность приближения мы можем получить.

16.4 Многочлен Тейлора. Формула Тейлора.

Определение 140. Пусть $f \in \mathcal{D}^n(a)$. Многочлен

$$P_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называется **многочленом Тейлора**, а функция $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ — его **остаточным членом**.

Многочлен Тейлора обладает тем свойством, что $P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a) \ldots P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$, т.е. обладает порядком касания не меньше n. Логично предположить, что в окрестности точки a он «мало отличается» от исходной функции $f(x)$. Следующая теорема показывает, что значит «мало отличается».

Теорема 95. *Пусть $f \in \mathcal{D}^n(a)$ и $f^{(n)} \in \mathcal{C}(a)$. Тогда*

$$R_n(x) = \overline{\overline{o}}\big((x-a)^n\big)(x \to a),$$

т.е.

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \overline{\overline{o}}\big((x-a)^n\big) \text{ при } x \to a. \quad (16.4.1)$$

Формула 16.4.1 называется формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство.
(аналогично Теореме 94) Рассмотрим отношение $\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ и применим n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0,$$

□

16.5 Ряд Тейлора для элементарных функций.

Все функции рассматриваются в разложении при $a = 0$ (ряд Маклорена).

1. Одна из наиболее простых формул получается для e^x, поскольку $(e^x)^{(n)} = e^x$. При $a = 0$ имеем:$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \overline{\overline{o}}(x^n)$.

2. Аналогично для показательной функции: $a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \ln^n a + \overline{\overline{o}}(x^n)$.

3. Степенная функция: $(1+x)^\alpha = 1+\alpha\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}+$ $+\overline{\overline{o}}(x^n)$. Заметим, что в случае натурального α здесь при $n \geq \alpha$ получается формула бинома Ньютона.

4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+2})$.

5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \overline{\overline{o}}(x^{2n+1})$.

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \overline{\overline{o}}(x^n)$.

16.6 Различные способы оценки остаточного члена

Существуют и другие формы записи остаточного члена, для того, чтобы получить их докажем следующее утверждение:

Утверждение 43 (Общая форма остаточного члена)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{n+1}(U_\varepsilon(a))$ *и* $g \in \mathcal{D}(U_\varepsilon(a))$. *Тогда для любого* $x_0 \in U_\varepsilon(a)$ *существует* $\xi = \xi(x_0) \in [a, x_0]$ *или* $[x_0, a]$, *такое, что*

$$R_n(x_0) = \frac{g(x_0) - g(a)}{g'(\xi)} \cdot \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} \cdot (x_0 - \xi)^n.$$

Доказательство.

Рассмотрим следующую функцию: $h(x) = f(x_0) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x_0 - x)^k$. Заметим, что $h(x_0) = 0$, $h(a) = R_n(x_0)$ и

$$h'(x) = -f'(x)+\big(-f''(x)(x_0-x)+f'(x)\big)+\big(\frac{-f'''(x)}{2!}(x_0-x)^2+f''(x)(x_0-x)\big)+\ldots$$
$$\ldots+\big(\frac{-f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_0-x)^{n-1}+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(x_0-x)^{n-2}\big)+$$
$$+\big(\frac{-f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0-x)^n+\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_0-x)^{n-1}\big) =$$
$$= \frac{-f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0-x)^n.$$

По теореме Коши найдется $\xi \in [a, x_0]$ такая, что

$$\frac{h(x_0) - h(a)}{g(x_0) - g(a)} = \frac{h'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Подставляя соответствующие выражения, получим

$$\frac{-R_n(x_0)}{g(x_0) - g(a)} = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{g'(\xi) \cdot n!}(x_0 - \xi)^n,$$

следовательно

$$R_n(x_0) = \frac{g(x_0) - g(a)}{g'(\xi)} \cdot \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!} \cdot (x_0 - \xi)^n.$$

$\square$

Следствие 37 (Остаточный член в форме Лагранжа)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{n+1}(U_\varepsilon(a))$*. Тогда для любого* $x_0 \in U_\varepsilon(a)$ *существует* $\xi = \xi(x_0) \in [a, x_0]$ *или* $[x_0, a]$*, такое, что*

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}.$$

Доказательство.
Возьмем $g(x) = (x_0 - x)^n$ и воспользуемся предыдущим утверждением:

$$R_n(x) = \frac{0 - (x_0 - a)^{n+1}}{-(n+1)(x_0 - \xi)^n} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x_0 - \xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}.$$

$\square$

Следствие 38 (Остаточный член в форме Коши)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{n+1}(U_\varepsilon(a))$*. Тогда для любого* $x_0 \in U_\varepsilon(a)$ *существует* $\theta \in (0, 1)$*, такое, что*

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}\big(a + (x_0 - a) \cdot \theta\big)}{n!} \cdot (1 - \theta)^n (x_0 - a)^{n+1}.$$

Доказательство.
Возьмем $g(x) = x$, тогда

$$R_n(x_0) = \frac{x_0 - a}{1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x_0 - \xi)^n. \tag{16.6.1}$$

Пусть $\theta = \frac{\xi - a}{x_0 - a}$, тогда $1 - \theta = \frac{x_0 - \xi}{x_0 - a}$, следовательно $x_0 - \xi = (1 - \theta) \cdot (x_0 - a)$. Подставим равенство $(x_0 - \xi)^n = (1 - \theta)^n \cdot (x_0 - a)^n$ в уравнение 16.6.1, получим: $R_n(x_0) = (x_0 - a) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (1 - \theta)^n \cdot (x_0 - a)^n$. А поскольку $\xi = a + (x_0 - a) \cdot \theta$, то $R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}\left(a + (x_0 - a) \cdot \theta\right)}{n!} \cdot (1 - \theta)^n (x_0 - a)^{n+1}$, $\square$

Следствие 39 (Остаточный член в форме Шлёмильха–Роша)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{n+1}(U_\varepsilon(a))$ *и* p *— некоторое положительное число. Тогда для любого* $x_0 \in U_\varepsilon(a)$ *существует* $\xi = \xi(x_0) \in [a, x_0]$ *или* $[x_0, a]$*, такое, что*

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot p}(x_0 - a)^p \cdot (x_0 - \xi)^{n-p}.$$

Доказательство.
Выберем $g(x) = (x_0 - x)^p$. Тогда $g(x_0) = 0$, $g(a) = (x_0 - a)^p$ и $g'(\xi) = -p \cdot (x_0 - \xi)^{p-1}$, следовательно

$$R_n(x_0) = \frac{-(x_0 - a)^p}{-p(x_0 - \xi)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x_0 - \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot p}(x_0 - a)^p \cdot (x_0 - \xi)^{n-p},$$

□

16.7 Использование формулы Тейлора для приближенных вычислений

Формула Тейлора позволяет определять, как ведет себя некоторая функция вблизи заданной точки. Замечательный пример использования этой формулы приводит Ричард Ф. Фейнман в своей книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман».

Когда я впервые попал в Бразилию, я как-то раз обедал, не помню во сколько, — я постоянно приходил в ресторан не вовремя, — поэтому и оказался единственным посетителем. Я ел рис с бифштексом (который обожал), а неподалеку стояли четыре официанта.

Тут в ресторан вошел японец. Я уже раньше видел его: он бродил по городу, пытаясь продать счеты. Он начал разговаривать с официантами и бросил им вызов, заявив, что может складывать числа быстрее, чем любой из них.

Официанты не хотели потерять лицо, поэтому сказали: «Да, да, конечно. А почему бы Вам не пойти к тому посетителю и не устроить соревнование с ним?»

Этот человек подошел ко мне. Я попытался сопротивляться: «Я плохо говорю на португальском!» Официанты засмеялись. «С числами это не имеет значения», — сказали они.

Они принесли мне карандаш и бумагу.

Человек попросил официанта назвать несколько чисел, которые нужно сложить. Он разбил меня наголову, потому что пока я писал числа, он уже складывал их.

Тогда я предложил, чтобы официант написал два одинаковых списка чисел и отдал их нам одновременно. Разница оказалась небольшой. Он опять выиграл у меня приличное время.

Однако японец вошел в раж: он хотел показать, какой он умный. «Multiplicao[2]!» — сказал он.

Кто-то написал задачу. Он снова выиграл у меня, хотя и не так много, потому что я довольно прилично умею умножать.

А потом этот человек сделал ошибку: он предложил деление. Он не понимал одного: чем сложнее задача, тем у меня больше шансов победить.

Нам дали длинную задачу на деление. Ничья.

Это весьма обеспокоило японца, потому что он явно прекрасно умел выполнять арифметические операции с помощью счет, а тут его почти победил какой–то посетитель ресторана.

[2]Умножение (порт.) — Прим. пер.

«Raios cubicos!» — мстительно говорит он. Кубические корни! Он хочет брать кубические корни с помощью арифметики! Трудно найти более сложную фундаментальную задачу в арифметике. Должно быть, это был его конек в упражнениях со счетами.

Он пишет на бумаге число — любое большое число — я до сих пор его помню: 1729,03. Он начинает работать с этим числом и при этом что–то бормочет и ворчит: «Бу–бу–бу–хм–гм–бу–бу», — он трудится как демон! Он просто погружается в этот кубический корень!

Я же тем временем просто сижу на своем месте.

Один из официантов говорит: «Что Вы делаете?»

Я указываю на голову. «Думаю!» — говорю я. Затем пишу на бумаге 12. Еще через какое–то время — 12,002.

Человек со счетами вытирает со лба пот и говорит: «Двенадцать!»

«О, нет! — возражаю я. — Больше цифр! Больше цифр!» Я знаю, что, когда с помощью арифметики берешь кубический корень, то каждая последующая цифра требует большего труда, чем предыдущая. Это работа не из легких.

Он опять уходит в работу и при этом бормочет: «Уф–фыр–хм–уф–хм–гм...». Я же добавляю еще две цифры. Наконец, он поднимает голову и говорит: «12, 0!»

Официанты просто светятся от счастья. Они говорят японцу: «Смотрите! Он делает это в уме, а Вам нужны счеты! И цифр у него больше!»

Он был абсолютно измотан и ушел, побежденный и униженный. Официанты поздравили друг друга.

Каким же образом посетитель выиграл у счетов? Число было 1729, 03. Я случайно знал, что в кубическом футе 1728 кубических дюймов[3]), так что было ясно, что ответ немногим больше 12. Излишек же, равный 1,03, — это всего лишь одна часть из почти 2000, а во время курса исчисления я запомнил, что для маленьких дробей излишек кубического корня равен одной трети излишка числа. Так что мне пришлось лишь найти дробь $\frac{1}{1728}$, затем умножить полученный результат на 4 (разделить на 3 и умножить на 12). Вот так мне удалось получить целую кучу цифр.

Несколько недель спустя этот человек вошел в бар того отеля, в котором я остановился. Он узнал меня и подошел. «Скажите мне, — спросил он, — как Вам удалось так быстро решить задачу с кубическим корнем?»

Я начал объяснять, что использовал приближенный метод, и мне достаточно было определить процент ошибки. «Допустим, Вы дали мне число 28. Кубический корень из 27 равен 3...»

Он берет счеты: жжжжжжжжжжжжжжжжжж — «Да», — соглашается он.

И тут до меня доходит: он не знает чисел. Когда у тебя есть счеты, не нужно запоминать множество арифметических комбинаций; нужно просто научится щелкать костяшками вверх–вниз. Нет необходимости запоминать, что $9 + 7 = 16$; ты просто знаешь, что когда прибавляешь 9, то нужно передвинуть десятичную костяшку вверх, а единичную — вниз. Поэтому основные арифметические действия мы выполняем медленнее, зато мы знаем числа.

Более того, сама идея о приближенном методе вычисления была за пределами его понимания, несмотря на то, что зачастую невозможно найти метод точного вычисления кубического корня. Поэтому мне так и не удалось научить его брать кубический корень или объяснить, как мне повезло, что он выбрал число 1729,03.

[3] Р.Фейнман — американский физик, а у них, в США все измеряется в футах, дюймах и.т.д. — Д.В.

Этот пример показывает, что с помощью разложения в ряд Тейлора можно вычислять приближенные значения различных функций.

Предметный указатель

Литература

[1] С. М. Никольский, М. К. Потапов. Алгебра и начала анализа.

[2] И. П. Макаров. Дополнительные главы математического анализа.

[3] Е. В. Майков. Математический анализ. Введение.

[4] М. И. Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой. Задачи по математике. Алгебра и начала анализа (Библиотечка "Квант выпуск 22)

[5] Н. Я. Виленкин. Рассказы о множествах.

[6] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу.

[7] Г. Е. Шилов. Математический анализ (функции одного переменного). Часть 1.

[8] В. А. Зорич. Математический анализ. Часть 1.

[9] В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. Задачи по математике. Начала анализа: Справочное пособие.

[10] И.А. Виосагмир, "Высшая математика для чайников. Предел функции http://viosagmir.ru/books, 2011 г., 98 ст.

[11] И.А. Виосагмир, "Высшая математика для чайников. Производные и дифференциалы http://viosagmir.ru/books, 2011 г., 36 ст.

[12] H. Kojima, Sh. Togami, The Manga Guide to Calculus, Ltd. Becom Co.