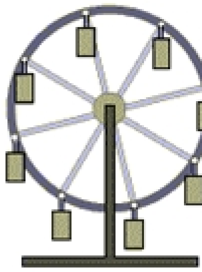
Кинематика твердого тела и задачи со связями

Твердым телом или абсолютно твердым телом называется такое материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми его точками сохраняется с течением времени.

Различают разные движения твердого тела:

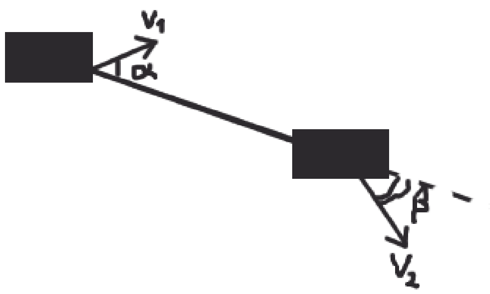
Поступательное движение: такое движение, при котором любая прямая, нарисованная на твердом теле (связанная с телом) при его движении остается параллельной своему начальному положению. Примеры поступательного движения: движение педалей велосипеда относительно рамы, движение кабинок колеса обозрения относительно Земли:



Теорема без доказательства: При поступательном движении твердого тела, скорости и ускорения точек тела одинаковы.

Эта важная теорема, точнее следствие из нее, может использоваться для решения некоторых задач по кинематике, а именно, так называемых «задач со связями». Это такие задачи, в которых есть несколько тел и есть «связь» между ними. Связь — это некоторый материальный объект, который должен сохранять свою «длину».

Допустим, что есть два тела, связанных нерастяжимой нитью (то есть нить имеет постоянную длину) Тогда проекции скоростей тел на направление нити должны быть равны (это как раз следует из того, что длина нити не изменяется).

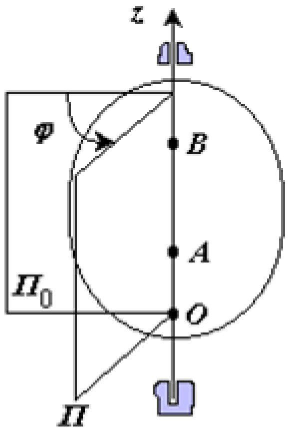


$$V_1\cos\alpha = V_2\cos\beta$$

Вообще, очень много задач «со связями» следует решать исходя из соображения, что размер (длина, радиус, еще какая-то геометрическая характеристика связи) должен оставаться или постоянной величиной или меняться некоторым заданным образом. Заданным образом, это как если бы на картинке выше к телу 2 была бы привязана катушка, которая наматывала бы на себя нитку с постоянной скоростью **u.** Тогда выражение для связи мгновенных скоростей было бы не такое ($V_1\cos\alpha=V_2\cos\beta$), а другое:

$$V_1\cos\alpha = V_2\cos\beta + u$$

Вращательное движение: это такое движение твердого тела, когда на нем можно выделить минимум две точки, которые неподвижны. Прямая, проходящая через эти точки, называется **осью вращения.** Само вращение обозначается стрелкой (**z**). Чтобы узнать, как вращается тело, нужно как бы посмотреть на эту стрелку с той стороны, куда она направлена, и тогда вы будете видеть тело, вращающееся против часовой стрелки:



Траектории всех точек тела — это окружности, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Для характеристики вращения твердого тела определяется величина: **угловая скорость**. Это та же самая угловая скорость, которая была введена для описания вращательного движения материальной точки. Мы будем считать такую угловую скорость вектором, для задач этого достаточно.

Дополнение

Угловая скорость - не совсем обыкновенный вектор, он называется «псевдовектор». Представьте себе стрелку, которая направлена сверху вниз и отражается в зеркале. Отражение этой стрелки тоже будет направлено сверху вниз. И так «отражаются» обычные вектора. Теперь представьте, что это не просто стрелка а направление угловой скорости волчка, который крутится на полу по часовой стрелке. И вектор угловой скорости будет направлен вниз. Но если этот волчок отражается в зеркале, то там он крутится не по часовой стрелке, а против. И, значит, вектор угловой скорости «с той стороны» должен быть направлен не сверху вниз, а снизу вверх. Для решения наших задач это не играет роли, но вообще можно подумать, что бы это могло быть? Например, попробуйте подумать над вопросом, а могут ли быть какие нибудь не векторные величины, а просто числа, характеризующие какую-нибудь физическую величину которые так же ведут себя при «отражении в зеркале». Масса, например, или длина — не меняют знак при отражении. Температура и заряд тоже.

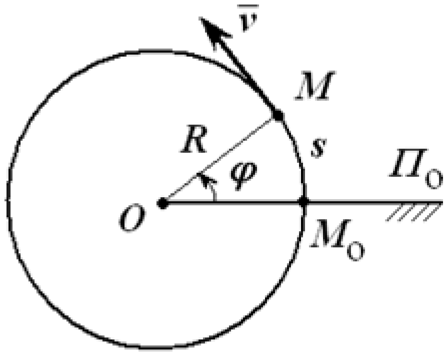
Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

Так как траектории вращающегося тела — окружности, то при определении скорости и ускорения удобно пользоваться естественным способом задания движения. «Дуговая» координата, то есть путь, который проходит точка по дуге, связана с углом поворота выражением:

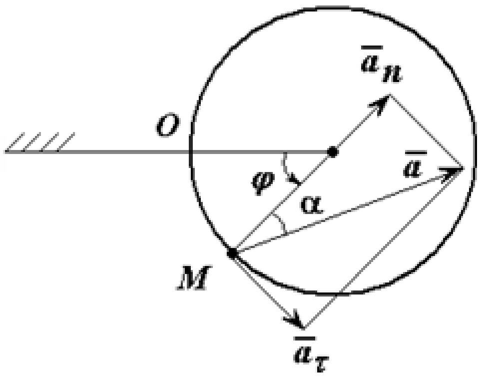
$$S = \varphi R$$

Выражение для модуля линейной скорости точки на твердом теле будет такое же, как если бы это просто была точка, двигающаяся по окружности:

$$v = \omega R$$



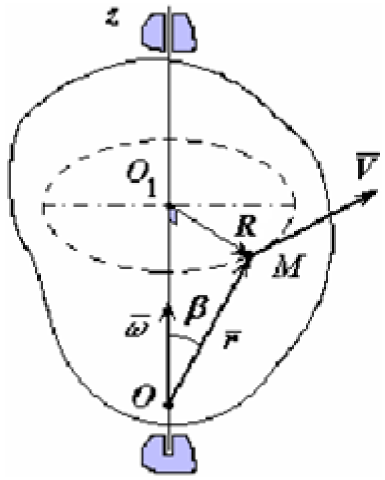
Что касается ускорения точки твердого тела — то тут все точно так же, как если бы это просто была точка, двигающаяся по окружности. Для такой точки также определены нормальное и тангенциальное ускорение. Полное ускорение - это их векторная сумма:



Векторные выражения (без доказательства) для скорости и ускорения точки вращающегося тела выглядят так же, как просто для материальной точки, двигающейся по окружности:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}]$$
$$\mathbf{a} = [\,\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{R}\,] + [\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\,]$$

в выражении для полного ускорения первое слагаемое [**ε** x **R**] — тангенциальное ускорение, а второе [**ω** x **v**] — нормальное, **ε** — это угловое ускорение, производная угловой скорости по времени. Этот вектор сонаправлен угловой скорости, если модуль угловой скорости увеличивается и противоположно направлен, если уменьшается. В любом случае, вектор **ε** коллениарен вектору **ω**.

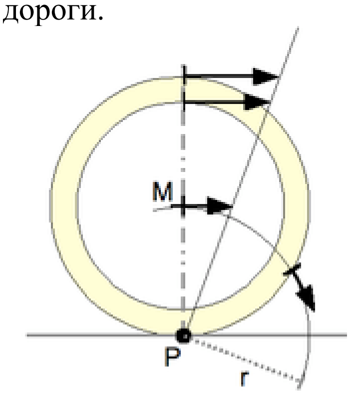


Сферическое движение твердого тела — это такое движение твердого тела, когда одна точка этого тела все время остается неподвижной. В этом случае очевидно, что траектории всех точек твердого тела располагаются на поверхностях сфер.

Сложное движение твердого тела — сумма нескольких движений твердого тела.
Например, колесо, катящееся по земле — это сумма поступательного движения вдоль дороги и вращательного движения относительно оси колеса.

Мгновенная ось вращения — это такая прямая, относительно которой в данный момент времени любое сложное движение твердого тела можно представить, как вращение относительно этой прямой.

Например, в случае колеса, катящегося по дороге, мгновенная ось вращения проходит через точку соприкосновения колеса и дороги.



А это значит, что если известна мгновенная ось вращения, то очень просто определить направление и модуль вектора скорости любой точки колеса.

$$v = \omega r$$

здесь **r** — расстояние от интересующей нас точки до мгновенной оси вращения, а **ω** - угловая скорость вращательного движения.

Мгновенная ось вращения не обязательно проходит через хотя бы одну точку твердого тела. Например, в том случае, если колесо движется с проскальзыванием, то мгновенная ось вращения может находиться как над поверхностью, по которой движется колесо, так и под поверхностью, в зависимости от того, в какую сторону проскальзывает колесо.

Как узнать, где проходит мгновенная ось вращения?

Она проходит там, где мгновенные скорости точек твердого тела равны нулю. Если тело катится по поверхности, то мгновенная ось вращения проходит через точку соприкосновения тела с поверхностью.

Но иногда бывает так, на твердом теле нет ни одной точки, скорость которой была бы равна нулю. (В этом случае бывает полезно перейти в такую систему отсчета, в которой найдется точка с нулевой скоростью). Но есть и общий способ: Если можно найти такую точку O, для которой мгновенную скорость **v** любой точки А твердого тела можно выразить так: **v** = [**ω** x **r**], где **ω** — некоторый постоянный вектор, **v** — вектор мгновенной скорости точки тела, а **r** — вектор OA, то через эту точку обязательно проходит мгновенная ось вращения.