Предварительные сведения из математики

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, которое равно произведению их модулей на косинус угла между ними.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \alpha$$

Если известны координаты векторов, то скалярное произведение можно записать черех их координаты так:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Свойства скалярного произведения векторов:

Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нуля: $a \cdot a \geq 0$

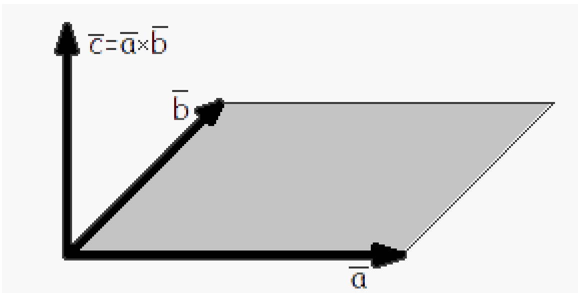
Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля: $a \cdot a = |a|^2$

Операция скалярного произведения не зависит от порядка векторов: $a \cdot b = b \cdot a$

Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то или вектора перпендикулярны (ортогональны): $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор **c**, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах **a** и **b**, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтоб наименьшее вращение от **a** к **b** вокруг вектора c осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора **c**.



Векторное произведение двух векторов $a = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $b = \{b_x; b_y; b_z\}$ в декартовой системе координат - это вектор, значение которого можно вычислить, используя следующую формулу:

$$[\, a \times b \,] = \{a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x\}$$

Свойства векторного произведения векторов:

Модуль векторного произведения двух векторов a и b равен площади параллелограмма построенного на этих векторах:$S_{парал}$ = [a × b]

Площадь треугольника построенного на векторах a и b равна половине модуля векторного произведения этих векторов.

Векторное произведения двух не нулевых векторов a и b равно нулю тогда и только тогда, когда вектора коллниарны

Вектор c, равный векторному произведению не нулевых векторов a и b, перпендикулярен этим векторам.

[a × b] = -[b × a]

[(k a) × b] = [a × (k b)] = k [a × b] (k — число)

[(a + b) × c] = [a × c] + [b × c]

Кинематика материальной точки

Ускорение

Ускорение — векторная величина, которая численно равна производной мгновенной скорости по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Равноускоренное движение

Если ускорение постоянно, то зависимость радиус-вектора от времени выглядит так:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

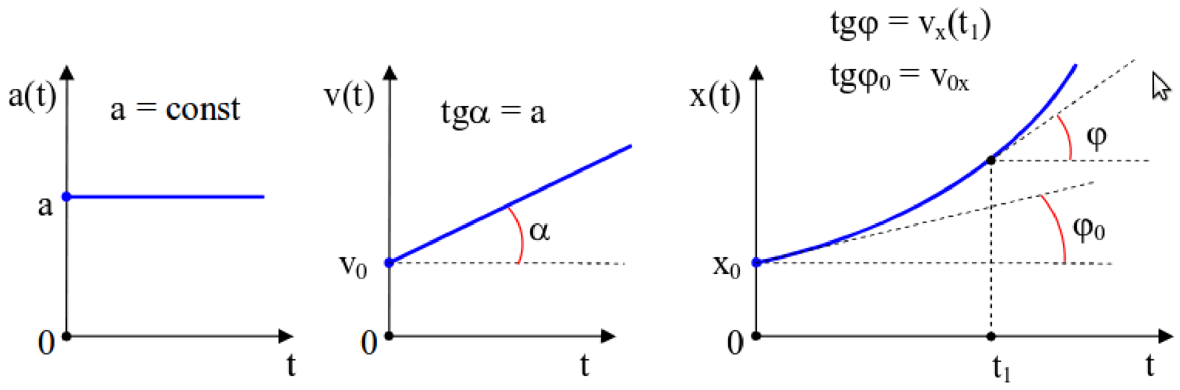
При этом, если движение одномерное (то есть меняется только одна координата x при движении) то зависимость этой координаты от времени выглядит так:

$$x(t) = x_0 + v_x t + \frac{at^2}{2}$$

Примером равноускоренного движения может служить свободное падение тел вблизи поверхности Земли.

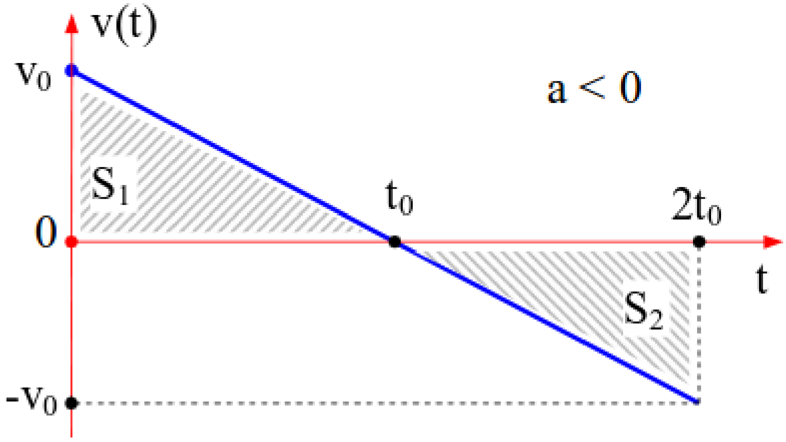
При равноускоренном движении скорость тела меняется по такому закону.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$



Для иллюстрации рассмотрим такой пример: тело начинает двигаться из некоторой точки A правее начала координат с начальной скоростью v_0, направленной вправо и с постоянным ускорением a, направленным влево, то есть «равнозамедленно», с отрицательным ускорением. До тех пор, пока снова не вернется в точку A. Зависимость скорости от времени будет такой:

$$v = v_0 - at$$



Через время t_0 после начала движения скорость тела становится равной нулю, и тело меняет направление движения на обратное, то есть начинает движение к точке A. Через такой же интервал времени $t_0= 2t_0–t_0$ тело проходит через точку A с той же скоростью v_0, но направленной противоположно первоначальному направлению. Расстояния, проходимые телом в прямом и обратном направлениях одинаковы, т.е. $S_1=S_2 = S$. Путь, пройденный телом, равен $S_1+S_2= 2S$. Перемещение равно нулю (тело вернулось в исходное положение, в точку A).

Ускорение свободного падения

Вблизи поверхности Земли из-за ее притяжения и, считая что сопротивление воздуха пренебрежимо мало, все тела движутся равноускоренно. Вектор ускорения свободно падающих тел направлен вертикально вниз к поверхности земли и обозначается буквой **g**. Модуль этого вектора равен приблизительно 9.8 м/с^2. Это ускорение называется «ускорение свободного падения». Модуль ускорения свободного падения немного зависит от широты местности, например, на земном экваторе он составляет 9.79 м/с^2, а на северном и южном полюсах 9.83 м/с^2.

Для примера покажем, что движение тел вблизи поверхности Земли происходит всегда по параболе. Напишем зависимость радиус-вектора от времени и спроецируем эту зависимость на оси X и Y. При этом ось X направлена вправо, а ось Y — вертикально вверх.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

т

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

Заметим, что $a_x = 0$, а $a_y = -g$. (Выше мы говорили о том, что вектор ускорения свободного падения направлен вертикально вниз). Перепишем второе и третье уравнения с учетом этого факта.

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}$$

Обратите внимание, что по горизонтальной оси тело движется равномерно, то есть координата x тела меняется равномерно. Выразим из первого уравнения t и подставим во второе. Получим:

$$t = \frac{x(t) - x_0}{v_{x0}}$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{x0}}\right) - \frac{g\left(\frac{x(t) - x_0}{v_{x0}}\right)^2}{2}$$

Подставляя время во второе уравнение получим, что координата y тела зависит от координаты x тела по закону:

$$y(t) = Ax(t)^2 + Bx(t) + C,$$

где:

$$A = -\frac{g}{2v_{x0}^2}$$

$$B = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} + \frac{gv_{x0}}{v_{x0}^2}$$

$$C = y_0 - \frac{v_{y0}x_0}{v_{x0}} - \frac{gx_0}{2v_{x0}^2}$$

то есть траектория движения — парабола. Обратите внимание, что значение коэффициента A — отрицательно, то есть это парабола, направленная ветвями вниз.

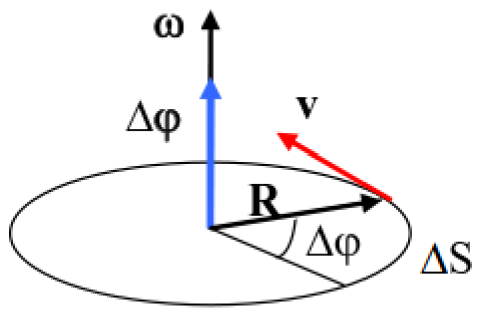
Криволинейное движение

Криволинейным называется такое движение, траектория которого представляет собой кривую линию (например, окружность, эллипс, гиперболу, параболу). Примером криволинейного движения является движение планет, конца стрелки часов по циферблату.

В общем случае скорость при криволинейном движении изменяется как по величине, так и по направлению.

Движение по окружности.

Частным случаем криволинейного движения является движения по окружности. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R. Ее поворот за некоторое время Δt можно задать углом Δφ. Этому углу Δφ можно поставить в соответствие вектор **Δφ**, который направлен перпендикулярно окружности, по которой движется точка, а его модуль численно равен углу Δφ, выраженному в радианах:



Направление вектора **Δφ** выбирают с помощью правила «правого винта», то есть если смотреть с конца вектора **Δφ,** то точка совершает круговое движение **против** часовой стрелки. Векторы, которые связаны с направлением вращения — это «псевдовекторы» и их можно откладывать от любой точки. О том, чем еще отличаются псевдовекторы от вектором, вы узнаете потом.

Мгновенная угловая скорость (обозначается буквой **ω)** — это производная угла по времени.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

Если вращение равномерно, то угловая скорость в каждый момент времени постоянна. Пусть за малый промежуток времени точка повернулась на малый угол Δφ. Тогда она прошла путь, равный S = R Δφ = RωΔt. В этом случае путевая скорость или модуль линейной скорости равен:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(\omega R t)}{dt} = \omega R \frac{dt}{dt} = \omega R$$

Вектор скорости **v** связан с вектором **ω** так:

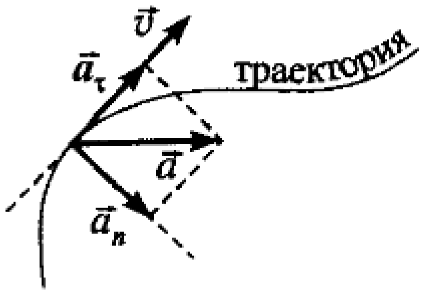
$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]$$

Про векторное произведение читайте в предварительных сведениях из математики.

Ускорение при криволинейном движении

В случае криволинейной траектории движения вектор ускорения **a** характеризует скорость изменения вектора **v** как по модулю, так и по направлению. Обычно вектор **a** раскладывают на две составляющие, одна из которых направлена по касательной к траектории, а вторая — перпендикулярно к ней. (Когда говорят перпендикулярно, физики и математики иногда говорят «по нормали»). Первая компонента обозначается $\mathbf{a}_\tau$ и называется **тангенциальным** или касательным ускорением. Вторая составляющая обозначается **a_n** и называется **нормальным** или центростремительным ускорением. Тангенциальное ускорение характеризует скорость изменения модуля вектора скорости.

$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$



Если материальная точка движется по окружности с постоянной скоростью, то ее тангенциальное ускорение равно нулю, а вектор нормального ускорения направлен к центру окружности и равен:

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$$

Используя формулу, указанную выше со связью между угловой скоростью и скорость, выражение для нормального ускорения можно переписать так:

$$|\vec{a}_n| = \omega^2 R$$

Но в общем случае, если мы хотим определить ускорение тела, нужно смотреть зависимость скорости от времени и попытаться взять производную. Здесь были рассмотрены только частные случаи движения с постоянным ускорением и криволинейное движение по окружности.