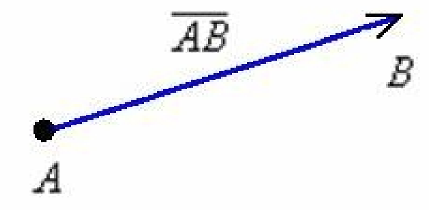
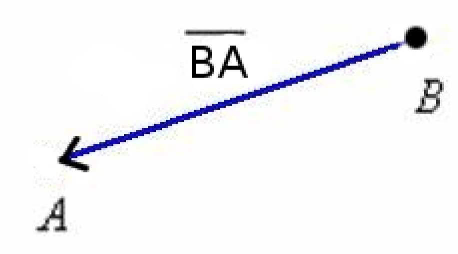
Предварительные сведения из математики

Вектора и действия с векторами.

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец.



В этом векторе началом является точка A, а концом — точка B. Сам вектор обозначается **AB**. Направление вектора имеет значение. Если переставить стрелку в другой конец отрезка AB, то получится совершенно другой вектор: **BA**.



Вектора можно записывать двумя большими латинскими буквами, при этом первая буква обозначает начало вектора, а вторая конец вектора.

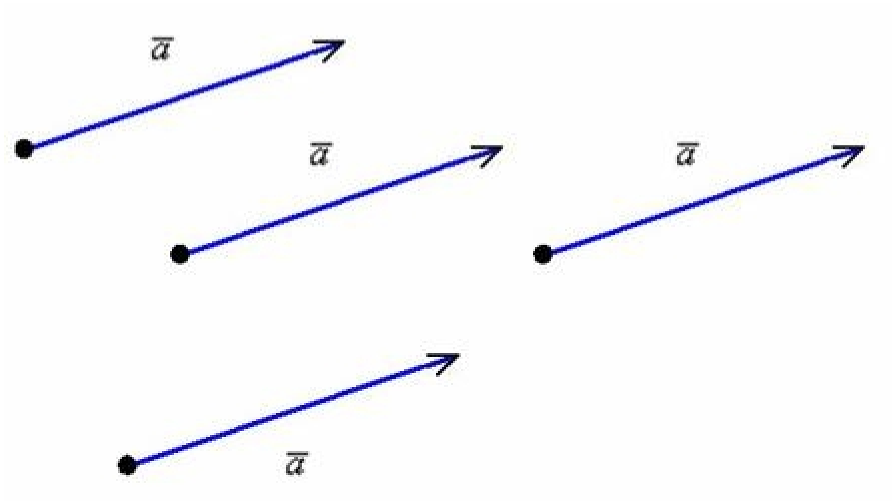
Вектора мы будем обозначать полужирным написанием. Например: AB — это отрезок, а **AB** — вектор. Вектор можно обозначать чертой над буквами, как это сделано на рисунках или стрелкой: $\vec{A}B$

Также вектора можно обозначать маленькой латинской буквой, например, **a**, или так же, но со стрелкой сверху: $\vec{a}$

Нулевой вектор — это вектор, у которого начало совпадает с концом.

Длиной или **модулем** вектора **AB** называется длина отрезка AB. Модуль обозначается прямыми скобками: |**AB**|.

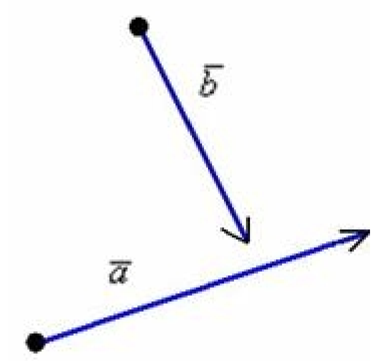
Вектор может начинаться в любой точке. Мы будет рассматривать так называемые **свободные вектора,** то есть для нас будет важно направление вектора и его модуль. А из какой точки он начинается — неважно.
Вектора на рисунке ниже — равны:



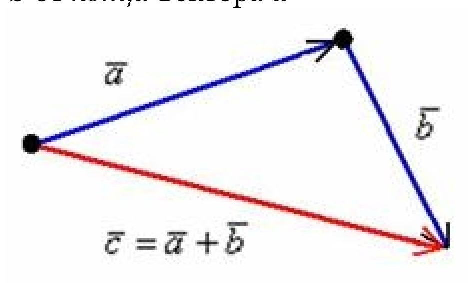
Далее как правило мы будем обозначать вектора маленькими латинскими буквами и не заботиться, от какой точки они отложены.

Сложение векторов

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора **a** и **b**:

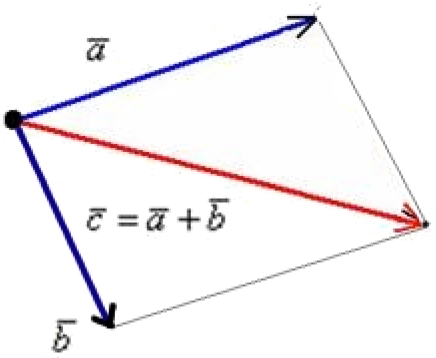


Требуется найти сумму данных векторов. В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор **b** от *конца* вектора **a**



Суммой векторов **a** и **b** является вектор **c**. Для лучшего понимания правила в него можно вложить физический смысл: пусть некоторое тело переместилось по вектору **a**, а затем по вектору **b**. Тогда сумма векторов **a**+**b** представляет собой вектор перемещения **c** с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов.

Два вектора также можно складывать и другим способом: ***правилом параллелограмма***. Для этого нужно оба вектора **a** и **b** отложить от одной точки и построить на них параллелограмм. Суммой векторов **a+b** будет диагональ этого параллелограмма, которая начинается в той же точке, где начало обоих векторов:



Коллениарность векторов

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. То есть, речь идёт о параллельных векторах. Когда говорят о векторах, всегда используют прилагательное «коллинеарные».

Представьте два коллинеарных вектора. Если их стрелки направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

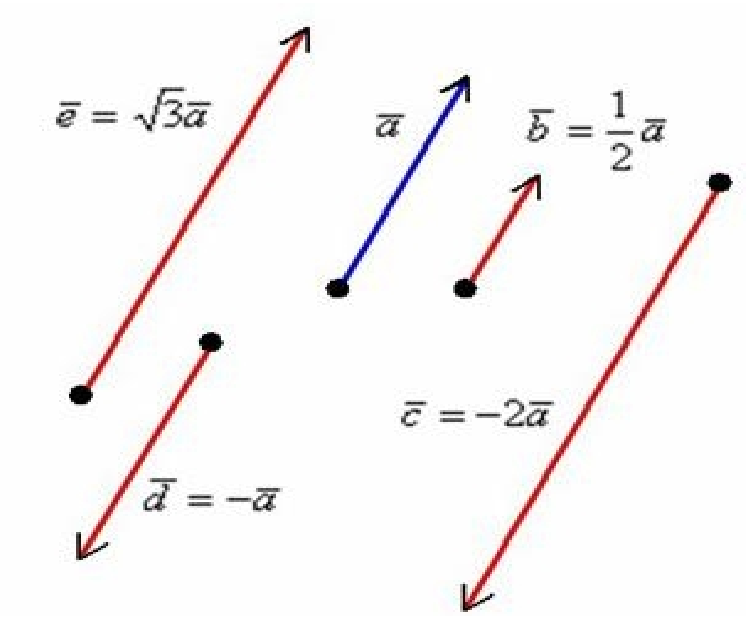
Обозначения: коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности:

$a \parallel b$, при этом возможна детализация: $a \uparrow\uparrow b$ (векторы сонаправлены) или $a \uparrow\downarrow b$ (векторы направлены противоположно).

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора **a** на число c является такой вектор **b** , длина которого равна |c| |**a**|, причём векторы **a** и **b** сонаправлены при c>0 и противоположно направлены при c<0.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:



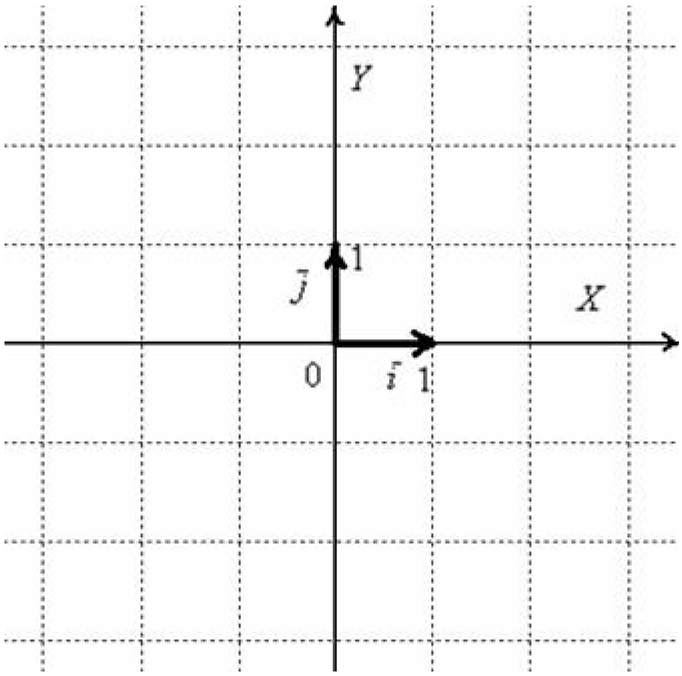
Обратите внимание, что все вектора коллинеарны, при этом один вектор выражен через другой, например, **c** = -2**a**. Обратное тоже справедливо: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны.
Таким образом: если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный (по отношению к исходному) вектор.

Какие векторы являются равными?

Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. Определение будет неточным (избыточным), если сказать: «Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину».

Координаты вектора на плоскости

Нарисуем прямоугольную систему координат и от начала координат отложим единичные (то есть их модуль равен 1) векторы **i** и **j**:



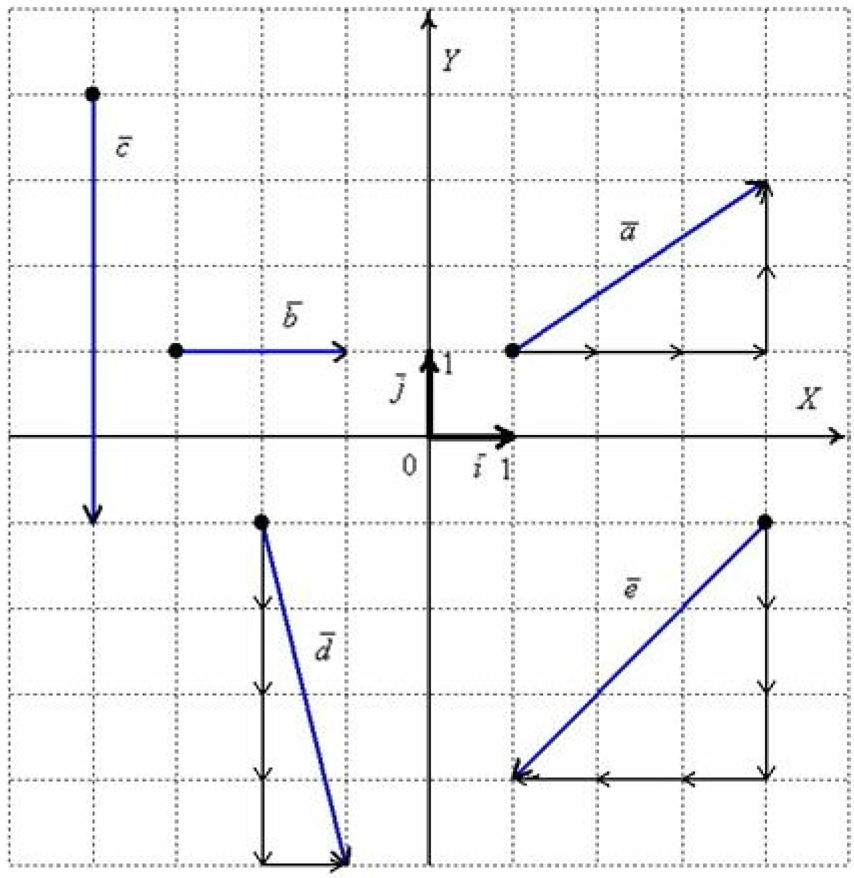
Вектора **i** и **j** — перперндикулярны. На языке векторов говорят, что они **ортогональны.** Вообще, когда речь идет о векторах, вместо «параллельные» и «перпендикулярные» принято говорить **коллениарные** и **ортогональные.**

ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $i \perp j$

Любой вектор, который нарисован на плоскости, можно представить единственным образом, как сумму векторов **i** и **j,** умноженных на некоторые числа (x и y).

a = x **i** + y **j**

Выражение, записанное сверху, называется **разложением вектора a по базису (i,j).** При этом числа x,y называются **координатами вектора a.**



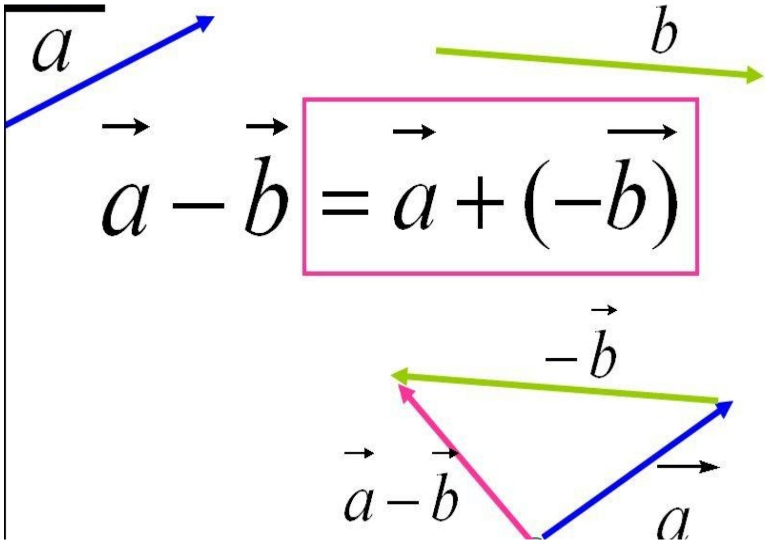
Поясним написанное выше на примерах.

a = 3**i** + 2**j.** На рисунке видно, что здесь используются рассмотренное выше правило умножения вектора на число (3**i** и 2**j**) а также правило сложения векторов.

Мысленно отложите вектор **a** от любой другой точки плоскости. Совершенно очевидно, что его разложение будет «привязано к нему». Вот что такое «свободный вектор», он «всё носит при себе». Это свойство справедливо для любого вектора. Интересно, что сами базисные (свободные) векторы **i,j** не обязательно откладывать от начала координат, один можно нарисовать, например, слева внизу, а другой – справа вверху, и от этого ничего не изменится. Только это не всегда удобно.

Векторы **b** = 2**i**, **c** = 5**j** иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор **b** сонаправлен с базисным вектором **i**, вектор **c** направлен противоположно по отношению к базисному вектору **j**. У данных векторов одна из координат равна нулю, подробно можно записать так:
b = 2**i** + 0**j**
c = 0**i** + (-5)**j**

Кстати, тут мы можем отметить, что такое **вычитание векторов.** Это просто сложение с вектором, умноженным на (-1). **c** = **a** — **b** означает всего лишь **c** = **a** + (-1**b**)



Вектора могут быть записаны через свои координаты. То есть, например **a**(3,2), **b**(2,0). Иногда их пишут через знак равенства: **a** = (3,2), **d =** (1,-4)

Сами базисные вектора (**i,j**), конечно, записываются так же: **i** = (1,0), **j** = (0,1).

При записи координаты векторов переставлять нельзя. Потому что вектора **a** = (3,2) и **a'** = (2,3) — это совсем разные вектора. При записи на первом месте пишется координата x вектора, а на втором — координата y.

Координаты точек и координаты векторов

Каждой точке на плоскости в прямоугольной системе координат соответствуют две координаты (x,y). Например, есть две точки A(x1,y1) и B(x2,y2). Был проведен вектор из точки A в точку B (**AB**).
Координаты вектора **AB** будут следующими: (x2-x1, y2-y1). Для нахождения координат вектора по координатам его начала и конца нужно **из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.**

Обязательно нужно понимать различие между координатами точек и координатами векторов:

Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

Координаты же вектора – это его разложение по базису **(i,j),** например **AB** = -4**i**+2**j**. Любой вектор является свободным, поэтому при необходимости мы легко можем отложить его от какой-нибудь другой точки плоскости.

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: A(2,1), B(-2,3), **AB**(-4,2) а смысл координат абсолютно **разный**, и следует понимать эту разницу.

Как найти модуль вектора по его координатам?

Очень просто: $|a|=\sqrt{(x^2+y^2)}$, где x,y — координаты вектора.

Как вычислять координаты вектора при

сложении, вычитании и умножении на число?

Пусть есть два вектора **a и b**
a = (x1, y1),
b = (x2, y2).

Тогда:

сложение:
Если **c** = (x3,y3) и **c = a + b,** то x3 = x1 + x2, y3 = y1 + y2

вычитание:
Если **c** = (x3,y3) и **c = a - b,** то x3 = x1 - x2, y3 = y1 - y2

умножение на число:
Если **c** = (x3,y3) и **c =** k***a,** то x3 = k*x1, y3 = k*y1, где k - число

Что такое производная

Средняя скорость

Для того, чтобы понять, как устроена производная, попробуем это понять на примере средней скорости и мгновенной скорости. Вспомним определение **средней скорости:** на промежутке времени от t1 до t2:

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

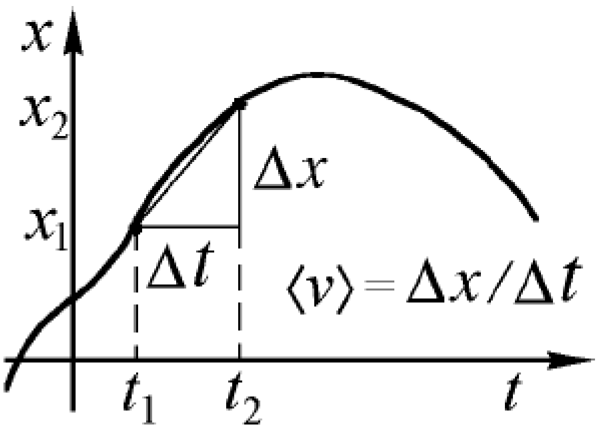
или

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

или

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Здесь выражения типа Δx обозначают не умножение величины Δ на величину x, а **изменение** этого x.



Геометрически средняя скорость — это тангенс угла между хордой (отрезком, соединяющим точки (t2,x2) и (t1,x1)) и осью t.

Мгновенная скорость одномерного движения

Идея мгновенной скорости проста — это та же средняя скорость, но интервал времени, в который рассчитывается эта средняя скорость очень мал — это «мгновение». Когда хотят написать, что интервал мал, то есть стремится к нулю, используют математическое обозначение lim (предел)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$

Мгновенная скорость одномерного движения — это предел отношения изменения координаты к изменению интервала времени.

Этот предел берется при интервале времени, стремящимся к нулю. Для того, чтобы посчитать этот предел, нужно вычислить координаты x в момент времени t, затем в момент времени t + Δt (получится малое перемещение Δx). Дальше нужно это малое перемещение разделить на значение интервала времени Δt.

Рассмотрим пример.

Пусть известно, что координата x от времени зависит так: $x = 4t^2$ м, тогда найдем мгновенную скорость в момент времени «2 секунды после начала движения»:

$$v(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(2 + \Delta t) - x(2)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4(2 + \Delta t)^2 - 4 * 2^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{16\Delta t + 4\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (16 + 4\Delta t)$$

Теперь устремляем Δt к нулю и получаем v(2) = 16 м/с

Производная функции f — это то же самое, что «мгновенная скорость» это функции. Если координата x зависит от времени t, то есть координата x является функцией времени t, то некоторая функция f является «координатой», которая зависит от «времени» x.

Производная функции f(x) — это предел отношения изменения функции к изменению параметра этой функции. Производную обозначают по-разному. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: f', $\frac{df}{dx}$.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

Кинематика материальной точки

Кинематика — это раздел механики, в которой изучается движение тел без учета причин, вызвавших это движение.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Пространство, в котором происходит движение тел, рассматривается как трехмерное, время полагают ни с чем не связанным и протекающим равномерно.

Современное развитие физики привело к не таким простым представлениям о пространстве и времени. Напимер, теория относительности показала, что при скоростях, близких к скорости света (300 000 км/с), пространство и время зависят от скорости движения. При обычных скоростях указанная зависимость практически не обнаруживается и представления о пространстве и времени, установленные в классической механике, сохраняют силу.

Положение тела в пространстве или изменение его с течением времени может быть определено только по отношению к другим телам. Для того, чтобы начать изучать движение некоторого тела, нужно сначала выбрать другое тело, относительно которого это движение мы будем изучать.

Система отсчета — это совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов. Например, если нам интересно движение Земли вокруг Солнца, то разумно будет выбрать систему отсчета, связанную с Солнцем и относительно нее Земля будет двигаться.

А если нам интересно изучать движение машины по поверхности Земли, то будет разумно выбрать систему отсчета, связанную с поверхностью Земли.

Разумеется, нет никакой принципиальной разницы между выбранными системами отсчета, все явления будут происходить в них одинаково. Разница заключается только в удобстве. Например, неудобно изучать движение машины по земле, если в качестве системы отсчета выбрать Солнце.

Все изучаемые тела имеют размер: бывают тела большие и маленькие. Иногда, для изучения движения тела размер неважен. В этом случае можно представить, что все тело сосредоточено в одной маленькой точке.

Материальная точка — идеальное тело, размерами и вращением которого можно пренебречь при решении задач кинематики.

Например, если нам интересно, как движется машина по поверхности Земли, можно себе представить, что это вовсе не машина, а материальная точка, которая в данный момент времени имеет положение (координату), скорость, ускорение.

В дальнейшем, если не указано обратное, под «телом» мы будем понимать именно материальную точку.

С телом отсчета связывают систему координат, которая служит для указания положения тел. Наиболее часто применяется декартова система координат, названная по имени французского ученого René Descartes (1596–1650). На прямой определить координаты проще всего. Одна из точек прямой выбирается за начало отсчета О. Задается положительное направление на прямой (оси). В положительной части оси координата x точки равна ее расстоянию от начала, в отрицательной части – координата равна расстоянию со знаком минус.

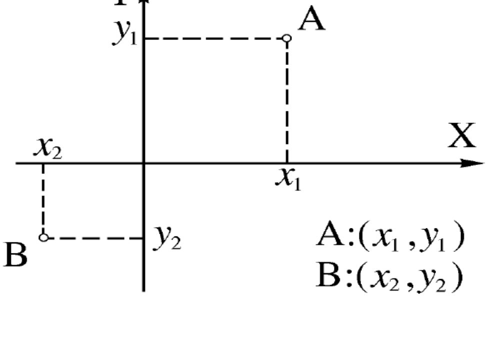


Рис. 1

На плоскости из выбранного начала отсчета O проводятся под прямым углом две координатные оси X и Y (Рис. 1). Из интересующей нас точки опускаются перпендикуляры на оси и прочитываются на них координаты x и y . Координаты точки на плоскости записывают в круглых скобках числами через запятую: (x, y). Чтобы по координатам узнать расстояние r от начала отсчета до частицы, применим теорему Пифагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Если координаты двух точек равны соответственно (x_1, y_1) и (x_2 ,y_2), то расстояние между ними равно:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Таким образом, для указания положения тела можно ввести **радиус-вектор**. Радиус-вектор - вектор, проведенный из начала координат в точку, в которой находится тело. Если известен радиус-вектор тела, то известен его модуль и угол α.

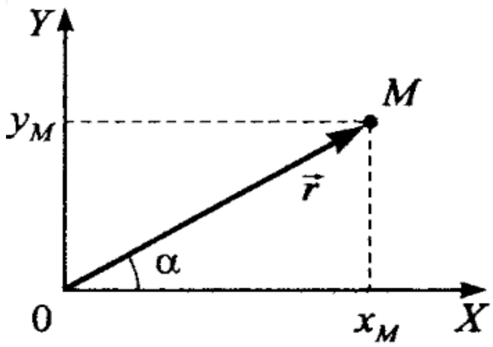


Рис 2.

Зная радиус-вектор, можно найти координаты тела:

$$x = |r| \cos(\alpha),\ y = |r| \sin(\alpha)$$

Траектория тела — это линия, которая описывается телом в пространстве при его движении.
Если тело движется по прямой (при этом оно может двигаться в разные стороны), то такое движение называется **прямолинейным.** Если не по прямой — **криволинейным.**

Длиной пути (или путем) называют сумму длин всех участков траектории, пройденных точкой. Путь обычно обозначают буквой S.

Перемещением называют вектор, проведенный из начального положения тела в конечное.

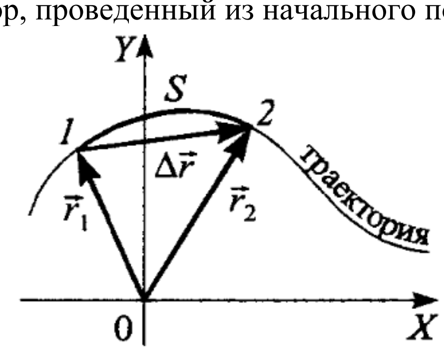


Рис 3.

На рис. 3 указаны радиус-векторы начального и конечного положения тела (r_1, r_2), перемещение (Δr), путь S. Как видно из рисунка, $\Delta r = r_2 - r_1$.

Пусть материальная точка переместилась из положения 1, определяемого радиус-вектором $\mathbf{r_1}$ в положение 2, определяемого радиус-вектором $\mathbf{r_2}$ (как указано на рис. 3)
Перемещение $\mathbf{\Delta r}$ — вектор, проведенный из начального положения материальной точки в конечное. Как видно из рисунка: $\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ (посмотрете предварительные сведения из математики, если не очевидно). Очевидно, что в общем случае $|\mathbf{\Delta r}| \neq S$. То есть модуль вектора перемещения не равен пути. Например, на рисунке выше он меньше.
Однако, если движение материальной точки прямолинейное в одном направлении, то путь, пройденный точкой в точности равен модулю вектора перемещения.

Скорость

Движение материальной точки связано со скоростью, которая показывает куда и как быстро в данный момент времени движется материальная точка. Скорость — это вектор.

Мгновенная скорость материальной точки — это производная радиус-вектора по времени: (если непонятно, смотрите предварительные сведения из математики)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории, а модуль можно найти как производную пути по времени.

$$|\vec{v}| = \frac{dS}{dt}(\Delta t \to 0, |d\vec{r}| = dS)$$

Также удобно использовать понятие **средней путевой скорости** — это величина

$$v_{cp} = \frac{S}{t}$$

где S — это путь, которое тело прошло за время t.

Кинематическое уравнение движения

Кинематическое уравнение движения — это зависимость радиус-вектора точки от времени. Как вы уже знаете, радиус-вектор как и любой другой вектор можно записать через координаты: $\mathbf{r} = (x,y)$. Тогда уравнение движения — это зависимость x(t) и y(t). Сейчас мы будет рассматривать равномерное движение в плоскости, поэтому все наши уравнения движения будут выглядеть так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v}\,t$$

Посмотрите внимательно на это уравнение — в нем три вектора и один скаляр (когда говорят «скаляр» имеют в виду «число»). Это уравнение может быть записано через координаты материальной точки:

$$x = x_0 + v_x t$$
$$y = y_0 + v_y t$$

Очевидно, что $\mathbf{r} = (x,y)$, $\mathbf{r_0} = (x_0,y_0)$, $\mathbf{v} = (v_x,v_y)$. (Если не очевидно — посмотрите сведения из математики — как вычислять координаты вектора, который является суммой других векторов и при умножении на число)

Относительность движения

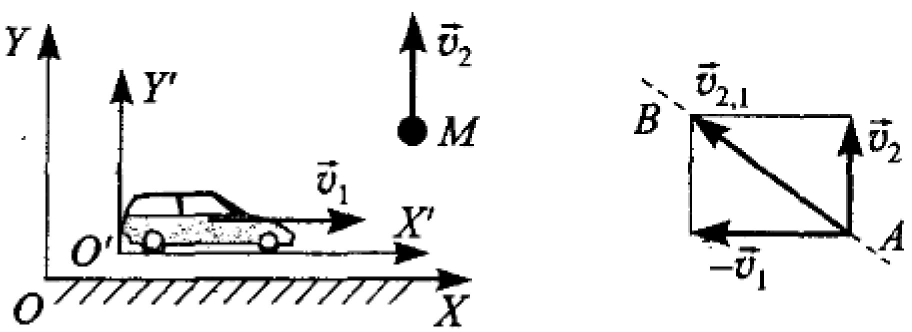
Иногда бывает нужно найти скорости тел в разных системах отсчета. Или известны скорости в некоторой движущейся системе, а в неподвижной нет. Для этого обычно нужно выбрать две системы отсчета: **неподвижную** и **движущуюся**. Например, неподвижной системой отсчета в некоторой задаче может быть Земля, а движущейся — автомобиль, едущий по ней.
Скорость тела относительно неподвижной системы отсчета называется **абсолютной скоростью. ($\mathbf{v}_{абс}$)**
Скорость тела относительно подвижной системы отсчета называется **относительной скоростью. ($\mathbf{v}_{отн}$)**
Скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется **переносной скоростью ($\mathbf{v}_{пер}$)**

Закон, который связывает эти три скорости называется **законом сложения скоростей** и выглядит так:

$$\mathbf{v}_{абс} = \mathbf{v}_{отн} + \mathbf{v}_{пер}$$

обратите внимание на то, что величины, входящие в этот закон — это векторные величины — скорости. Разумеется здесь имеются с виду **мгновенные скорости**. Конечно, в случае равномерного движения мгновенные скорости равны средним (в том смысле, что модуль мгновенной скорости всегда равен средней путевой скорости и направление мгновенной скорости не меняется)

Пример. Рассмотрим автомобиль, который движется со скоростью $\mathbf{v}_1$ по Земле. Свяжем с ним подвижную систему отсчета OX'Y'. С Землей свяжем неподвижную систему отсчета OXY. Пусть есть некоторое тело M, которое движется со скоростью $\mathbf{v}_2$ и эта скорость направлена вверх (например, вертикально вверх стартует космический корабль). Как будет выглядеть движение тела M относительно автомобиля, то есть относительно подвижной системы отсчета?



воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_{отн} = \mathbf{v}_{абс} - \mathbf{v}_{пер}$$

или

$$\mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1)$$

Здесь мы ввели обозначение $\mathbf{v}_{2,1}$ — это значит «скорость второго тела относительно первого». Вообще именно так относительные скорости и обозначаются, до запятой — какого тела, а после — относительно какого. В данном случае это означает «скорость космического корабля относительно автомобиля»**.** В системе отсчета OX'Y' автомобиль неподвижен, и наблюдателю, сидящему в автомобиле будет казаться, что космический корабль летит вдоль прямой AB**.**

Мы получили важный результат: **зная скорости тел относительно Земли можно найти скорость одного тела относительно другого:** $\mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.