§1. Элементарная теория чисел.

Задачи.

Все задачи выполняются без калькулятора.

1. В числе $12{*}456789$ одна цифра заменена на $*$. Перечислить все цифры, какие можно поставить вместо $*$ так, чтобы число $12{*}456789$ делилось на 3;

2. Доказать признак делимости на 9: натуральное число a делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа a делится на 9;

3. Может ли натуральное число, сумма цифр которого равна 30, быть квадратом какого-нибудь натурального числа?

4. Доказать признак делимости на 4: число a делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4;

5. Доказать, что следующие числа являются составными:

$$\begin{gathered} 18273627, \\ n^3-8,\ n \text{ — целое}, \\ 2^{13}-12^5, \\ 1661, \\ 5757, \\ 575757. \end{gathered}$$

6. Доказать признак деления на 11: натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр, занимающих нечетные позиции, и суммой цифр, занимающих четные позиции делится на 11. (Например, $10864194 = 11 \cdot 987654$; $10864194 = 0+6+1+4-(1+8+4+9) = 11-22 = -11 = 11 \cdot (-1)$).

7. Делится ли число 5432112345 на 11?

8. Доказать, что произведение четырех последовательных чисел делится на 24.

9. Делится ли сумма цифр чисел $1, 2, \ldots, 100$ на 3, 9, 4, 8?

Ответы к задачам. (1) 0, 3, 6, 9; (3) нет, не может, так как по признаку делимости на 3, оно делится на 3, но не делится на 9 по признаку делимости на 9; (5) 18273627 делится на 3 (так как $1 + 8 + 2 + 7 + 3 + 6 + 2 + 7 = 36 = 3 * 12$); $n^3 - 8 = (n - 2)(n^2 + 2n + 4)$; четное; $1661 = 11 * 151$; $5757 = 101 * 57$; $575757 = 10101 * 57$; (7) да, так как $5 + 3 + 1 + 2 + 4 - (4 + 2 + 1 + 3 + 5) = 0$ (признак делимости на 11); (8) обозначаем числа, например за $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ и доказываем как в задаче 2 из урока; (9) нет, нет, нет, нет.