§1. Элементарная теория чисел.

В этом параграфе мы будем изучать числа.

Натуральными называются числа, которые используются для счета предметов или обозначения номера предмета в ряду однородных предметов: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Целые числа — множество, образованое добавлением к множеству натуральных чисел числа нуль и отрицательных чисел: ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Натуральное число p называется простым, если имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Натуральное число n называется составным, если существуют натуральные числа $a > 1$ и $b > 1$, такие что $n = ab$. Иначе говоря, если натуральное число $n \geq 2$ не является простым, то оно составное.

Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 97 — простые, а числа 4, 6, 8, 9, 91 — составные.

Задача 1. Доказать признак деления на 3: натуральное число a делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа a делится на 3.

Решение. Пусть $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — цифры числа a. Тогда

$$a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 100 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

Например, число 345: $345 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$. Преобразуем сумму:

$$\begin{gathered} a = (10^n - 1)a_n + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + \ldots + (100 - 1)a_2 + (10 - 1)a_1 + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = \\ = 99\cdots 9 a_n + 9\cdots 9 a_{n-1} + \ldots + 99 a_2 + 9 a_1 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0). \end{gathered}$$

Все слагаемые делятся на 3, кроме последнего слагаемого, которое взято в скобки. Следовательно, a делится на 3 тогда и только тогда, когда слагаемое в скобках делится на 3.

Задача 2. Доказать, что $n^3 - n$ делится на 6 (n — целое).

Решение. Это очень простая задача (что видно из третьего способа доказательства), однако мы приведем 3 разных способа доказательства, для того чтобы показать, как можно решать более сложные задачи такого типа.

1) Докажем, что $n^3 - n$ делится на 2.

- Если n — четное, то $n = 2k$ (k — целое). Тогда $n^3 - n = 8k^3 - 2k = 2(4k^2 - k)$, то есть $n^3 - n$ делится на 2.

- Если n — нечетное, то $n = 2k + 1$ (k — целое). Тогда $n^3 - n = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 2k - 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 2k + 1)$, то есть $n^3 - n$ делится на 2.

Докажем, что $n^3 - n$ делится на 3.

- Если $n = 3m$ (m — целое), то $n^3 - n = 27m^3 - 3m = 3(9m^2 - m)$, то есть $n^3 - n$ делится на 3.

- Если $n = 3m + 1$ (m — целое), то $n^3 - n = 27m^3 + 27m^2 + 9m + 1 - 3m - 1 = 3(9m^3 + 9m^2 + 2m)$, то есть $n^3 - n$ делится на 3.

- Если $n = 3m + 2$ (m — целое), то $n^3 - n = 27m^3 + 54m^2 + 36m + 8 - 3m - 2 = 3(9m^3 + 18m^2 + 11m + 2)$, то есть $n^3 - n$ делится на 3.

Раз $n^3 - n$ делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

2) Докажем, что $n^3 - n$ делится на 6.

- Если $n = 6m$ (m — целое), то $n^3 - n = 6^3m^3 - 6m = 6(36m^2 - m)$, то есть $n^3 - n$ делится на 6.
- Если $n = 6m + 1$ (m — целое), то
$$n^3 - n = 6^3m^3 + 3 \cdot 36m^2 + 3 \cdot 6m + 1 - 6m - 1 = 6(36m^3 + 18m^2 + 2m),$$
то есть $n^3 - n$ делится на 6.
- Если $n = 6m + 2$ (m — целое), то
$$n^3 - n = 6^3m^3 + 3 \cdot 36 \cdot 2m^2 + 3 \cdot 6 \cdot 4m + 8 - 6m - 2 = 6(36m^3 + 18 \cdot 2m^2 + 11m + 1),$$
то есть $n^3 - n$ делится на 6.
- Если $n = 6m + 3$ (m — целое), то
$$n^3 - n = 6^3m^3 + 3 \cdot 36 \cdot 3m^2 + 3 \cdot 6 \cdot 9m + 27 - 6m - 3 = 6(36m^3 + 27 \cdot 2m^2 + 26m + 4),$$
то есть $n^3 - n$ делится на 6.
- Если $n = 6m + 4$ (m — целое), то
$$n^3 - n = 6^3m^3 + 3 \cdot 36 \cdot 4m^2 + 3 \cdot 6 \cdot 16m + 64 - 6m - 4 = 6(36m^3 + 18 \cdot 2m^2 + 47m + 10),$$
то есть $n^3 - n$ делится на 6.
- Если $n = 6m + 5$ (m — целое), то
$$n^3 - n = 6^3m^3 + 3 \cdot 36 \cdot 5m^2 + 3 \cdot 6 \cdot 25m + 125 - 6m - 5 = 6(36m^3 + 18 \cdot 2m^2 + 74m + 20),$$
то есть $n^3 - n$ делится на 6.

3) Самый наглядный способ. Разложим число на множители $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. То есть $n^3 - n$ — произведение трех последовательных целых чисел. Одно или два из них четные, значит $n^3 - n$ — четное. Ровно одно из трех последовательных целых чисел делится на 3, то есть $n^3 - n$ делится на 3. Следовательно, $n^3 - n$ делится на 6.

Замечание. Удобнее рассматривать не $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$, а $6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m-2$, $6m-1$.

Задача 3. Доказать, что при возведении натурального числа a в 5 степень последния цифра не изменится.

Решение. Сложный способ решения: представим n в виде $a = 10m + n$, где m — натуральное число, n — последняя цифра числа a, и рассмотрим 10 случаев: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ...

Простой способ решения: нам нужно доказать, что число $a^5 - a$ заканчивается нулем, то есть делится на 10. Преобразуем:
$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a-1)(a+1)(a^2+1).$$

Число $a^5 - a$ делится на 2, так как либо a, либо $a - 1$ делится на 2.

Докажем делимость на 5. Одно из чисел a, $a+1$, $a-1$, $a+2$, $a-2$ должно делиться на 5. Если a, $a-1$ или $a+1$ делятся на 5, то $a^5 - a$ делится на 5.

Если $a = 5k + 2$, k — натуральное, то $a^5 - a = (5k+2)((5k+2)^2 - 1)((5k+2)^2 + 1) = (5k+2)((5k+2)^2 - 1)(25k^2 + 10k + 5) = 5(5k+2)((5k+2)^2 - 1)(5k^2 + 2k + 1)$. Аналогично для $a = 5k - 2$.

Мы доказали, что $a^5 - a$ делится на 2 и на 5, то есть делится на 10, то есть последние цифры чисел a^5 и a совпадают.