

## Критерии проверки третьего тура олимпиады для 7-8 классов

### Оформление работы

Решение всех заданий помещены в один файл (в том числе создать один файл из рукописных сканов работ). 1 балл

Дополнительно, все решения, включая формулы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), в частности, закрашены необходимые клетки лабиринта +1 балл.

1. Автомат получает на вход два трехзначных числа без ведущих нулей. По этим числам строится новое число по следующим правилам. Вычисляются три числа без ведущих нулей – сумма старших разрядов заданных трехзначных чисел, сумма средних разрядов этих чисел, сумма младших разрядов. Полученные три числа записываются друг за другом в порядке невозрастания (что соответствует убыванию в случае различных чисел).

Для каждого из следующих 6 чисел приведите 2 трехзначных числа, из которых они могли быть получены или докажите, что число по указанным правилам получено быть не может.

*Решение.* При сложении двух цифр может получиться только однозначное или двузначное число, не превосходящее 18.

1) 101416 Это число можно разбить на подходящие 3 только единственным образом: 10 14 16, но такая последовательность не является невозрастающей, поэтому такое число получено быть не может. При этом объяснение, что число нельзя разбить на убывающую последовательность, не является верным, т.к., вообще говоря это сделать можно: 101 41 6.

2) 191615 Это число можно разбить на три двузначных числа 19 16 15 (другие разбиения содержат трехзначные числа), но 19 не может быть суммой двух цифр, поэтому такое число получено быть не может. Обоснование должно объяснять, почему по-другому разбить тоже нельзя.

3) 16153 Это число можно разбить на три подходящих как 16 15 3, оно может быть получено в результате действий, например, над 882 и 871.

4) 200 Это число можно разбить единственным образом на 2 0 0, оно могло быть получено только из чисел 100 и 100.

5) 111 Это число можно разбить единственным образом на 1 1 1, но в этом случае и в старшем разряде мы должны получить единицу, что не возможно при отсутствии ведущих нулей в исходных числах.

6) 11101 Это число можно разбить в том числе на 11 10 1, оно может быть получено, например, из 550 и 651.

За каждый пункт выставляется 1 балл, при этом в пунктах 1, 2, 5 отсутствие ответа должно быть полностью обосновано, иначе выставляется 0 баллов за соответствующий пункт.

2. Какие клетки приведенного лабиринта соответствуют требованию, что, начав движение в ней и выполнив предложенную ниже программу, РОБОТ уцелеет и остановится в закрашенной клетке (клетка **F6**)? Если РОБОТ начнёт движение в сторону находящейся рядом с ним стены, то он разрушится и программа прервётся.

*Программа:*

ПОКА <справа свободно ИЛИ снизу свободно>

ПОКА <справа свободно> вправо КОНЕЦ ПОКА

ПОКА <снизу свободно> вниз КОНЕЦ ПОКА

КОНЕЦ ПОКА

Скопируйте или перерисуйте лабиринт и пометьте нужные клетки.

*Решение.* Нужные клетки в таблице помечены зеленым. Технически проще всего это было сделать, установив цвет заливки для соответствующих клеток. Клетка F6 нам тоже подходит: начав в ней, робот никуда не сдвинется согласно условиям программы, то есть остановится в этой же клетке. Согласно программе робот будет двигаться вправо до препятствия, потом вниз до препятствия. Потом эти действия могут повторяться, но у данного лабиринта клеток, из которых можно снова двигаться вправо, нет.

*Критерии оценивания:* все 20 клеток помечены верно – 6, баллов, без F6 – 5 баллов. За каждую

1						
2						
3						
4						
5						
6						
	A	B	C	D	E	F

лишнюю или недостающую клетку кроме F6 вычитается по 2 балла, в случае отрицательных баллов выставляется 0.

3. Почтовый индекс в некоторой стране состоит из одной первой буквы (используется 26-символьный алфавит) и трех десятичных цифр, которые не могут быть все три одновременно равны 0. Сколько различных индексов можно построить? Ответ обосновать.

*Решение.* У нас есть 26 вариантов для первой буквы и 999 ( $1000 - 1$ ) вариантов для трех цифр.

Каждой букве может соответствовать любой из Таким образом, ответ  $26 \cdot (1000 - 1) = 26000 - 26 = 25974$ .

Правильный ответ с обоснованием – 6 баллов. Ответ без обоснования – 4 балла, с недостаточным обоснованием – 5 баллов. Правильная формула с ошибкой в вычислениях – 3 балла.

4. Цепочки символов (строки) создаются по следующему правилу.

Первая строка состоит из одного символа – цифры "1".

Каждая из последующих цепочек создается такими действиями:

в очередную строку дважды записывается цепочка цифр из предыдущей строки (одна за другой, подряд), а в конец приписывается еще одно число – номер строки по порядку (т.е. на  $i$ -м шаге дописывается число " $i$ ").

Вот первые 3 строки, созданные по этому правилу:

1) 1

2) 112

3) 1121123

Какие цифры стоят в восьмой строке на 121-126-м местах (считая слева направо с единицы)?

Приведите фрагмент строки из 6 цифр и объясните, как был получен ответ. Эффективное решение в данной задаче оценивается выше.

*Решение.* Первая строка состоит из 1 цифры, вторая из 3-х, третья из 7, 4-я из 15, в 5-я из 31, 6-я из 63, в 7-й строке 127 цифр, а так как в следующей строке мы сначала удваиваем предыдущую строку, то 6 искомым цифр в 8й строке будут теми же, что и 121-126я цифры в 7й.

Так как в конце каждой строки приписывается номер этой строки, значит последние 7 цифр седьмой строки 1234567, они имеют номера 121-127, значит ответ 123456.

*Критерии оценивания:* правильный ответ, полученный аналогично приведенному выше, – 6 баллов. Верные рассуждения и ошибка в ответе – 3 балла. Правильный ответ без обоснования или полученный путем выписывания 8 строк – 3 балла, 7 строк – 4 балла. Правильный ответ, полученный с помощью программы на любом языке программирования (текст программы приведен) – 5 баллов.

5. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 23 оканчивается на цифру 2. Ответ обоснуйте.

*Решение.* В позиционных системах счисления с основанием  $P$  для числа, оканчивающегося в них на 2, верно следующее представление:

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + 2.$$

Так как речь идет о десятичном числе 23, то

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + 2 = 23, \text{ отсюда}$$

$(a_n P^{n-1} + a_{n-1} P^{n-2} + \dots + a_1) P = 21$ , то есть 21 должно делиться на  $P$ , и  $P > 2$ . Таким образом, нам подходят такие делители числа 21 как 3, 7, 21. Покажем, как выглядит число 23 в каждой из этих систем счисления (в задании этого не требовалось):

$$23_{10} = 12_{21} = 32_7 = 212_3$$

*Критерии оценивания:* Все ответы найдены и обоснованы, в том числе доказано, что других не бывает – 6 баллов. Недостаточное обоснование – 5 баллов. Если найдены не все ответы, то тогда по 2 балла выставляется за каждый найденный при наличии обоснования и по 1 баллу – без обоснования. За каждый лишний (неправильный) ответ вычитается 2 балла.