Десятый класс

1. Сколько корней имеет уравнение $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0$? а) 0; б) 1; в) 2; г) 3.

   Решение. Заметим, что написанное можно свернуть, воспользовавшись формулой куба суммы: $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x+1)^3$. Из этого представления очевидно, что единственным корнем является -0.5.

   Ответ. б.

2. В остроугольном треугольнике ABC длина стороны AB равна 10, а угол ACB равен $45°$. Найдите расстояние от центра описанной окружности до стороны AB.

   Решение. Обозначим через O центр описанной окружности, а через M — середину AB. Так как AOB — центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и ACB, его величина равна $90°$. Так как AO и BO радиусы, этот треугольник является равнобедренным, а отрезок OM является в нем медианой и высотой. Медиана к гипотенузе равна половине гипотенузы, то есть $OM = 5$. Но эта длина и есть расстояние от O до AB.

   Ответ. 5.

3. Длину прямоугольника уменьшили в два раза, а ширину — в пять. На сколько процентов уменьшилась его площадь?

   Решение. Обозначим длину прямоугольника через a, а ширину — через b. Тогда площадь была ab, а стала — $\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{5}\right) = \frac{ab}{10}$, то есть уменьшилась в 10 раз. В процентах это будет уменьшением на 90 процентов.

   Ответ. 90.

4. Сколько целых отрицательных чисел удовлетворяет неравенству: $x^2 + 6x + 8 < 0$?

   Решение. Корни этого квадратного трехчлена — -2 и -4, то есть само неравенство можно переписать в виде $(x+2)(x+4) < 0$. Оно будет выполнено если и только если ровно одна из скобок положительна и ровно одна отрицательна. Это так для всех чисел из интервала $(-4, -2)$. Целым отрицательным среди них является ровно одно — -3.

   Ответ. 1.

5. Вычислить $\frac{\cos^2 30°}{\sin^4 45°}$.

   Решение. Хорошо известно, что $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Подставив эти числовые значения, получаем ответ 3.

   Ответ. 3.

6. Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая и третья цифра четные, а вторая — нечетная?

   Решение. Есть ровно 4 способа выбрать первую цифру, так как подойдет любая четная ненулевая цифра 2, 4, 6 или 8. На второе место можно поставить любую из пяти нечетных цифр, а на третье — любую из пяти четных. Таким образом общее число вариантов равно $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

   Ответ. 100.

Девятый класс

1. Сколькими способами можно выбрать среди четырех человек по одному на каждую из трех разных должностей? а) 12 б) 24 в) 81 г) 4

   Решение. Всего есть четыре способа выбрать человека на первую должность. На вторую должность после этого останется всего три кандидата. После выбора людей на первые две должности будет уже два варианта выбрать человека на третью должность. Итого получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта.

   Ответ. б.

2. Чему равно произведение квадратов корней уравнения $x^2 + 6x + 8 = 0$?

   Решение. По теореме Виета, произведение корней такого уравнения равно свободному члену разделенному на старший коэффициент, то есть равно восьми. Возводя в квадрат, получаем 64.

   Ответ. 64.

3. В квадрате $ABCD$ площади 12 отмечена середина стороны AD — точка E. Через F обозначим точку пересечения AC и BE. Найдите площадь четырехугольника $EFCD$.

   Решение. Имеют место равенства накрестлежащих углов $\angle FAE = \angle FCB$ и $\angle FBC = \angle FEA$. Из них следует подобие треугольников FBC и FEA. Так как AE в два раза меньше BC, коэффициент подобия равен двум. Сумма их высот опущенных на параллельные стороны AE и BC составляет ровно AB. Значит, высота опущенная на AE в треугольнике AFE равна $\frac{1}{3}AB$. Тогда площадь треугольника AEF равна $\frac{1}{12}AB^2 = 1$. Искомая площадь дополняется этой площадью до половины площади квадрата, то есть равна 5.

Ответ. 5.

4. Пусть m — натуральное число. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{2m+7}{m+2}$.

   Решение. Преобразуем данное выражение: $\frac{2m+7}{m+2} = 2 + \frac{3}{m+2}$. От m зависит только второе слагаемое и оно тем меньше, чем больше m. Таким образом, наибольшее значение выражения будет достигаться при наименьшем возможном m, то есть при $m = 1$. Соответственно, равно он будет 3.

   Ответ. 3.

5. Из пункта А в пункт Б вышел Вася, а одновременно с ним из Б в А вышел Петя. Встретились они спустя час, когда Вася прошел две трети расстояния. Через сколько часов после их одновременного старта Петя придет в А?

   Решение. Получается, что за этот час Петя прошел ровно треть расстояния. Значит, на то, чтобы пройти все расстояние, ему потребуется три часа.

   Ответ. 3.

6. Сколько целых решений имеет неравенство $|x+1| + |x-1| \leqslant 4$?

   Решение. Раскроем модули. Есть три разных случая:

   (a) $x > 1$. Выражение в левой части примет вид $2x$, то есть неравенство превратится в $2x \leqslant 4$. Целое решение с условием $x > 1$ у такого неравенства ровно одно — 2;

   (b) $1 \geqslant x \geqslant -1$. Выражение в левой части примет вид $x + 1 + 1 - x = 2$, то есть неравенство будет всегда верно. Целых решение при имеющихся ограничениях будет ровно три;

   (c) $x < -1$. Выражение в левой части примет вид $-2x$, а все неравенство превратится в $2x \geqslant -4$. При данных ограничениях целое решение у этого неравенства ровно одно — -1.

   Всего получаем пять решений.

   Ответ. 5.