Девятый класс

Замечания о проверке: Каждая задача оценивается по семибалльной шкале. После решений указаны критерии — это типичные ошибки. Ваша ошибка могла быть уникальной и здесь не перечислена.

1. Найдите все действительные решения уравнения $-\sqrt{15-x} + 2^{x-4} = 1$.

Решение. Заметим, что $x = 6$ является корнем уравнения. Кроме того, на всей области определения функция $-\sqrt{15-x} + 2^{x-4}$ является возрастающей, так как представляется в виде суммы двух возрастающих. Однако, это означает, что существует не более одного значения x , при котором достигается равенство. Отсюда следует, что угаданный нами корень единственен.

Ответ. 6.

Критерии проверки. Если не доказано, что решение $x = 6$ единственно, но этот корень приведен, ставилось 2 балла. В частности, нарисованный график доказательством не является.

2. Постройте такой набор натуральных чисел $a_1, \dots, a_{2014}$, что ни одно a_i не делится на a_j при $i \neq j$, но для любых i и j число a_i^2 делится на a_j .

Решение. Обозначим через p_k k -ое по счету простое число (в частности, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$). Через P обозначим произведение первых 2014 из них: $P = p_1 p_2 \dots p_{2014}$. Тогда положим $a_i = P \cdot p_i$. Очевидно, что при $i \neq j$ число a_i не делится на a_j . Однако, для любого j уже P^2 делится на a_j , а значит $a_i^2 = P^2 p_i^2$ и подавно.

Критерии проверки. Если соответствующий набор построен, но обоснование того, что он подходит, неаккуратное, ставилось 6 баллов.

3. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC через точку B проведена прямая параллельная CD . Она пересекает диагональ AC в точке E . Сравните площади треугольников ABC и DEC .

Решение. Докажем, что они попросту равны. Заметим, что равны площади треугольников CED и CBD , так как у них есть общее основание CD и высоты опущенные на него из точек B и E равны в силу параллельности BE и CD .

Аналогично доказывается равенство площадей треугольников CBD и ABC . У них общее основание BC и равны высоты, опущенные на него из A и D в силу параллельности BC и AD . Из двух доказанных равенств площадей следует требуемое равенство.

4. Многочлен $p(x)$ имеет степень $n > 1$. Известно, что числа $p(0), p(1), \dots, p(n-1)$ и $p(n+1)$ являются целыми. При каких n можно сделать вывод, что $p(k)$ целое для любого целого k ?

Решение. Рассмотрим многочлен $p(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n+1)!}$. Он удовлетворяет условию, так как равен нулю в точках с 0 по $n-1$ и равен единице при $x = n+1$. Однако, в точке $x = n$ он равен $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$. Значит такой вывод нельзя сделать ни при каком n .

Ответ. Ни при каком n .

Критерии проверки. Если в решении описаны многочлены, принимающие в целых точках целые значения, ставился 1 балл.

5. Назовем *странной ладьей* ладью, которая бьет только в трех направлениях из четырех (например, только вниз, вправо и вверх). Какое наибольшее число странных ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга? (направление, в котором ладья не бьет, свое у каждой ладьи, его определяете вы при расстановке)

Решение. Каждая линия (горизонталь или вертикаль) имеет два конца. Любая странная ладья бьет три конца линии (то есть либо оба конца вертикали и один конец горизонтали, либо наоборот). Если две ладьи бьют один и тот же конец одной и той же линии, то они бьют и друг друга. Всего этих концов $8 * 2 * 2 = 32$ штуки, то есть странных ладей можно поставить не более $\lceil \frac{32}{3} \rceil = 10$ штук.

Осталось привести соответствующий пример. Занумеруем строки шахматной доски цифрами от 1 до 8 сверху вниз, а столбцы латинскими буквами от a до h слева направо. Поставим ладьи не бьющие вниз на клетки $a1, c2$ и $e3$, не бьющие вверх — на $a8, c6$ и $f4$, не бьющие влево — на $g5$ и $h7$, не бьющие вправо — на $b7$ и $d5$.

Критерии проверки. В этой задаче пример стоил 3 балла, а оценка 4.

Если в примере неочевидно, в какие стороны бьют ладьи, ставилось 2 балла из 3.

Если в доказательстве оценки использовалось разбиение ладей на пары без объяснения, ставилось 3 балла из 4.