Десятый класс

Замечания о проверке: Каждая задача оценивается по семибалльной шкале. После решений указаны критерии — это типичные ошибки. Ваша ошибка могла быть уникальной и здесь не перечислена.

1. Найти все пары x и y, удовлетворяющие соотношению $4\cos x \sin y + 1 = 2\cos x + 2\sin y$.

   Решение. Уравнение легко преобразуется к виду $(2\cos x - 1)(2\sin y - 1) = 0$. Это, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\sin y = \frac{1}{2}$. Корнями первого уравнения являются $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а второго — $y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Ответ. Подойдут все пары (x, y), где либо $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $y = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Критерии проверки. Если из соотношения $(1-a)(1-b) = 0$ сделан вывод, что и a, и b равны единице, снималось 2 балла (то есть, ставилось 5).

2. На доске написано четыре квадратных трехчлена $x^2 + a_i x + b_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$, причем каждый из них имеет по два действительных корня. Может ли хулиган Вася так переставить числа b_1, b_2, b_3 и b_4, что после этой перестановки ни один из трехчленов не будет иметь действительных корней?

   Решение. Рассмотрим наименьший из b_i. Без ограничения общности, можно считать, что это b_1. Он мог либо остаться при своем же уравнении, у которого тогда будет действительный корень, либо попасть в другое уравнение, без ограничения общности, во второе. Найдем тогда дискриминант этого нового трехчлена $x^2 + a_2 x + b_1$: $D = a_2^2 - 4b_1$. В силу минимальности b_1, это число не меньше чем $a_2^2 - 4b_2$, которое больше нуля, так как трехчлен $x^2 + a_2 x + b_2$ имел два действительных корня. Значит, всегда останется хотя бы один трехчлен, имеющий два действительных корня.

   Ответ. Не может.

3. Рассмотрим на плоскости прямой угол ABC. Для каждого отрезка XY, для которого X принадлежит лучу BA, а Y — лучу BC рассмотрим точку Z на отрезке XY такую, что $XZ = 2ZY$. Найдите геометрическое место таких точек Z.

   Решение. Докажем, что искомым ГМТ является вся внутренность угла ABC. Пусть точка Z лежит внутри ABC. Проведем через Z прямую l параллельно BC. Теперь проведем прямую l' параллельно им обеим, но на в три раза большем расстоянии от BC, чем l. Пусть X — точка пересечения l' и AB, W — точка пересечения l и AB. Тогда проведем прямую XZ и обозначим точку её пересечения с BC через Y.

   Покажем, что построенные X и Y — те, что надо. Заметим, что треугольники XBY и XWZ подобны по трем углам. Значит, $\frac{XZ}{YZ} = \frac{XW}{XB} = \frac{2}{3}$, что и требовалось.

   Критерии проверки. Если найдены только ГМТ при фиксированной точке X и при фиксированной точке Y, ставилось 5 баллов.

4. Про натуральные $x, y > 2$ известно, что $x^2 + y^2 - 1$ делится на $x + y - 1$. Докажите, что $x + y - 1$ является составным числом.

   Решение. Рассмотрим число $(x + y - 1)(x + y + 1) - (x^2 + y^2 - 1) = 2xy$. Оно делится на $x + y - 1$, так как является суммой чисел делящихся на $x + y - 1$. Однако, если бы $x + y - 1$ было простым, то на него делилось бы одно из чисел 2, x и y. Однако, они все строго меньше $x + y - 1$. Значит, число $x + y - 1$ неминуемо составное.

   Решение. Если доказано только, что $2xy$ делится на $x + y - 1$, ставилось 3 балла. Если после этого разобраны только случаи, когда $x + y - 1$ равно $2x$, $2y$, x, y или 2, то ставилось 5 баллов.

5. В стране n городов и некоторые из них соединены дорогами. Известно, что в стране нет ни одного замкнутого несамопересекающегося маршрута длины 4. Докажите, что количество дорог не превосходит $\frac{n(n-1)^2}{4(n-2)}$. (если вы не можете доказать утверждение задачи, но можете доказать другую оценку — напишите её. Если она достаточно хорошая, это будет оценено)

   Решение. Рассмотрим два разных города A и B. Если бы существовали такие города C и D, что A и B соединены с каждым из них, то был бы маршрут $ACBD$ длины 4. Тогда, если A и B не связаны дорогой, то из них в сумме выходит не более $n - 1$ дороги, так как из оставшихся $n - 2$ городов не более чем в один могут быть дороги и из A, и из B. Аналогично, если A и B соединены дорогой, то суммарное число дорог, исходящее из них, не превосходит $n + 1$ (дорога между A и B считается дважды — как выходящая из A и как выходящая из B). Теперь просуммируем эти числа по всем парам городов. Тогда каждый город будет посчитан ровно $n - 1$ раз, а значит каждая дорога будет посчитана ровно $2n - 2$ раза (по $n - 1$ для каждого из концов). Если дорог всего E, то полученная сумма будет равна с одной стороны $2(n-1)E$, а с другой стороны будет не больше, чем $E(n+1) + \left(\frac{n(n-1)}{2} - E\right)(n-1)$. Таким образом, получаем неравенство $2(n-1)E \leqslant E(n+1) + \left(\frac{n(n-1)}{2} - E\right)(n-1)$. После преобразований получается $E \leqslant \frac{(n-1)^2 n}{4(n-2)}$, что и требовалось.

Критерии проверки. Из-за досадной оплошности составителей варианта, в исходной формулировке утверждение было неверно для малых n. Подразумевавшееся условие задачи и подразумевавшееся решение вы можете видеть выше. Тем, кто опроверг приведенную оценку и на этом остановился, ставилось 3 балла. Тем, кто доказал какую-то близкую оценку, ставилось в зависимости от продвижения от 4 баллов.