

Десятый класс

1. Найти все пары x и y , удовлетворяющие соотношению $4 \cos x \sin y + 1 = 2 \cos x + 2 \sin y$.
2. На доске написано четыре квадратных трехчлена $x^2 + a_i x + b_i$ ($i = 1, \dots, 4$), причем каждый из них имеет по два действительных корня. Может ли хулиган Вася так переставить числа b_1, b_2, b_3 и b_4 , что после этой перестановки ни один из трехчленов не будет иметь действительных корней?
3. Рассмотрим на плоскости прямой угол ABC . Для каждого отрезка XY , для которого X принадлежит лучу BA , а Y — лучу BC рассмотрим точку Z на отрезке XY такую, что $XZ = 2ZY$. Найдите геометрическое место таких точек Z .
4. Про натуральные $x, y > 2$ известно, что $x^2 + y^2 - 1$ делится на $x + y - 1$. Докажите, что $x + y - 1$ является составным числом.
5. В стране n городов и некоторые из них соединены дорогами. Известно, что в стране нет ни одного замкнутого несамопересекающегося маршрута длины 4. Докажите, что количество дорог не превосходит $\frac{(n-1)^2}{4}$. (если вы не можете доказать утверждение задачи, но можете доказать другую оценку — напишите её. Если она достаточно хорошая, это будет оценено)