Десятый класс

1. Есть четыре письма и четыре соответствующим образом подписанных конверта. Сколькими способами можно разложить письма по конвертам так, чтобы ни одно письмо не попало в свой конверт?

2. В ромбе $ABCD$ угол ABC тупой. Из точки B на сторону AD опущен перпендикуляр BX. Известно, что $AX = 7$ и $XD = 2$. Найдите длину отрезка BD.

3. При каком наибольшем целом n выражение $\frac{2n^2+3}{n-1}$ будет целым?

4. В каждой клетке таблицы 4×4 расположена лампочка. Изначально все лампочки выключены. За один ход разрешается поменять состояние на противоположное (вкл на выкл и выкл на вкл) у любых трех лампочек, идущих подряд в строке или столбце. Сколько разных конфигураций может получиться после применения нескольких таких операций? (под конфигурацией понимается табличка, в которой какие-то лампочки горят, а какие-то — нет)

5. В остроугольном треугольнике ABC площади 4 выбрана точка пересечения высот — H. Площадь треугольника AHB равна 1, а угол $CAB = 50°$. На отрезке CH выбрана точка D такая, что угол ADB прямой. Найдите площадь треугольника ADB.

6. Сколько корней имеет уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = -1$ на отрезке $[0, 20]$?

Девятый класс

1. Сколькими способами можно поставить на доску 3×3 двух коней так, чтобы они не били друг друга?

2. Окружности радиусов 5 и 10 имеют общий центр — точку O. На меньшей окружности выбрана точка X, а в большей выбран диаметр AB. Известно, что $\angle XAB = 10°$. Найдите величину $AX^2 + BX^2$.

3. Найдите наименьшее натуральное число, которое бы давало при делении на 5 остаток 3, при делении на 7 — остаток 5 и при делении на 17 — остаток 15.

4. В 11«Ж» классе СУНЦ МГУ изучается пять предметов. Каждый ученик имеет по каждому из предметов оценку 4 или 5. Кроме того, известно, что не существует таких двух учеников, что все оценки одного не хуже оценок другого (в частности, не существует двух учеников с одинаковыми оценками). Какое наибольшее число учеников может быть в 11 «Ж»?

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB > CD$) углы ACB и ADB прямые. Длина отрезка AB равна 15, высота трапеции равна 6. Найдите CD.

6. Найдите наибольшее a, при котором корни x_1, x_2, x_3 уравнения $x^3 + ax^2 - 0.1 = 0$ удовлетворяют соотношению $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 6$.