Медиана

Определение. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны.

Для решения задач удобно пользоваться и другим определением:

медиана есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключенных внутри треугольника и параллельны той его стороне, к которой проведена медиана.

Рассмотрим *свойства* медиан.

Теорема 1. Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$ считая от вершины.

Точка пересечения медиан называется *центром тяжести* треугольника (если подвесить картонный треугольник в точке пересечения его медиан, то он будет находиться в состоянии равновесия).

Доказательство (предложенное Архимедом). Воспользуемся следующими интуитивно ясными и имеющими простой механический смысл свойствами центра масс:

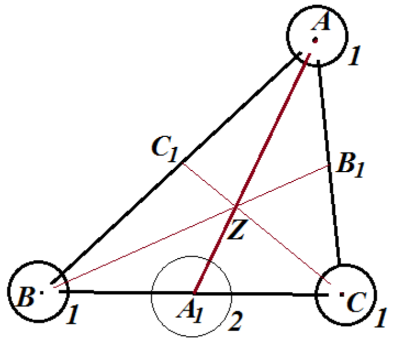

Рис. 1

1) всякая система конечного числа материальных точек имеет центр масс и притом единственный;

2) центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющим эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: произведение массы точки на расстояние от нее до центра масс одинаково для обеих точек;

3) если в системе материальных точек отменить некоторые из них, а массы отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение центра масс *всей* системы не изменится.

Пусть ABC – данный треугольник (рис. 1), AA_1, BB_1, CC_1 – его медианы. В вершинах этого треугольника расположим шарики одинаковой массы, скажем, по 1 грамму. Получающаяся система материальных точек имеет один центр масс Z (свойство 1). В силу свойства 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек $1B$ и $1C$ перенесем в их центр масс, т.е. по свойству 2, в точку A_1. Тогда Z окажется центром масс всего двух материальных точек $2A_1$ и $1A$, т.е. $Z \in AA_1$. Аналогично убедимся, что $Z \in BB_1$ и $Z \in CC_1$. Т.е. медианы треугольника имеют общую точку Z. И по правилу рычага (свойств 2) имеем $2 \cdot ZA_1 = 1 \cdot ZA$, т.е. $ZA:ZA_1 = 2:1$.

Теорема 2. Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что медиана AA_1 разбивает треугольник ABC на два равновеликих (см. рис. 3), т.е. площади треугольников AA_1B и AA_1C одинаковы.

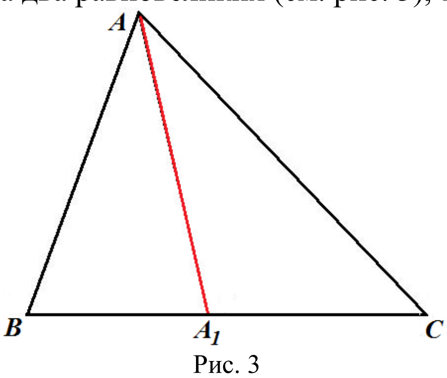

Рис. 3

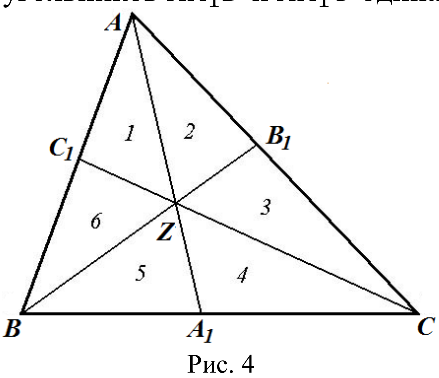

Рис. 4

По теореме 1 все медианы пересекаются в одной точке Z (рис. 4). Так как точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника, то BZA_1 и CZA_1, а также AA_1B и AA_1C равновеликие. Значит AZB и AZC также равновеликие. Но AZB и AZC состоят из двух равных по площади треугольников, т.е. все шесть треугольников имеют одинаковую площадь, равную $1/6$ площади данного треугольника.

Теорема 3. Длины медиан треугольника ABC можно выразить через его стороны:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2)-c^2}.$$

Доказательство. Пусть стороны треугольника ABC имеют длины $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Найдем длину медианы $AA_1 = m_a$, проведенную к стороне BC, зная длины сторон треугольника. Для этого воспользуемся одним из очень удобных приемов, свойственным медиане, а именно достроим треугольник ABC до параллелограмма (рис. 5), проведя $BF||AC$ и $CF||AB$. Легко увидеть, что A_1 будет являться точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABFC$.

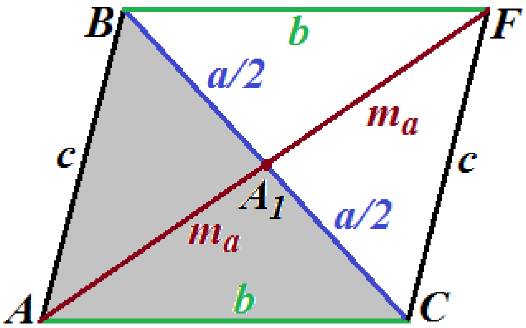

Рис. 5

Следовательно, длина диагонали AF будет равна $2m_a$, а вторая диагональ – $BC = a$.

Используя теорему о том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равняется сумме квадратов всех его сторон (*следствие теоремы косинусов*), получаем равенство

$$4m_a^2 + a^2 = 2(b^2+c^2),$$

откуда следует, что

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2(b^2+c^2)-a^2),$$

т.е. первая из доказываемых формул. Аналогично доказываются и остальные формулы. В них m_b и m_c – длины соответствующих медиан треугольника ABC.

Задача 1. Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник (т.е. треугольник со сторонами, равными медианам данного). Чему равно отношение площади данного треугольника и треугольника из его медиан?

Задача 2. Докажите, что для всех треугольников отношение суммы квадратов его медиан к сумме квадратов его сторон одно и то же. Чему равно это отношение?

Ответ. Сумма квадратов длин всех медиан треугольника равняется $3/4$ суммы квадратов длин его сторон.

Теорема 4 (*теорема Лейбница*). Пусть M – произвольная точка плоскости, G – центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. Докажите, что имеет место равенство

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Следствие. Точка на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до вершин данного треугольника является минимальной, – это точка пересечения медиан этого треугольника.

В то же время минимальная сумма расстояний до вершин треугольника (а не их квадратов) будет для точки, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в $120°$, если ни один из углов треугольника не больше $120°$ (*точка Ферма*), или для вершины тупого угла, если он больше $120°$.

Тогда легко найти расстояние d от точки пересечения медиан до центра описанной окружности. Действительно, это расстояние по теореме Лейбница равно корню квадратному из одной трети разности между суммой квадратов расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника и суммой квадратов расстояний от точки пересечения медиан до вершин треугольника. Получаем, что

$$d = \sqrt{R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}}.$$

Точка M пересечения медиан треугольника ABC является единственной точкой треугольника, для которой сумма векторов $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ равна нулю, т.е. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. Координаты точки M (относительно произвольных осей) равны средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника (из этих утверждений можно получить доказательство теоремы о медианах).

Задача 3. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение.

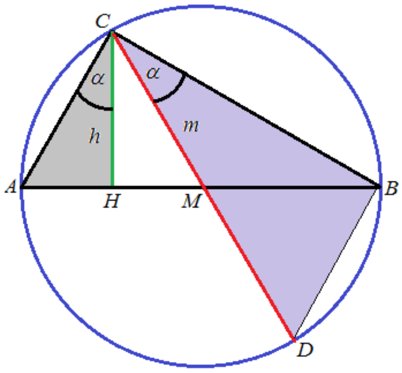

Рис. 6

Пусть высота CH и медиана CM треугольника ABC образуют со сторонами AC и BC равные углы (рис. 6). Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим медиану CM до пересечения с окружностью в точке D. Рассмотрим треугольники ACH и BCD. Так как $\angle ACH = \angle BCM$ по условию и $\angle CAB = \angle CDB$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то оставшиеся углы двух треугольников ACH и BCD соответственно прямые, т.е. $\angle AHC = \angle CBD = 90°$. Следовательно, CD – диаметр окружности, причем $CM = MD$.

С одной стороны центр описанной около данного треугольника окружности лежит на диаметре CD, с другой стороны, т.к. AB – хорда этой окружности и диаметр, проведенный через ее середину всегда перпендикулярен этой хорде. Так как медиана CM не является высотой треугольника, то оба этих диаметра имеют только одну общую точку M, которая и является центром описанной окружности. Следовательно, AB – диаметр окружности и $\angle ACB = 90°$.

Задача 4. Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) взята точка O так, что треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Найти OC, если известно, что $OA^2 + OB^2 = a^2$ ($a > 0$).

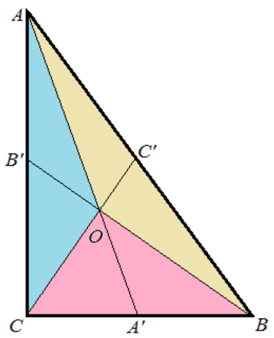

Рис. 7

Решение. По условию задачи треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Это сразу же наводит на мысль о том, что O – точка пересечения медиан треугольника ABC, так как обратное утверждение хорошо известно. Этот факт, действительно, нетрудно доказать (от противного) для любого треугольника. Дальнейшие вычисления очевидны (см. рис. 7):

$$OA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 + \frac{BC^2}{4}},\ OB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 + \frac{AC^2}{4}},$$
$$OC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}\frac{AB}{2} = \frac{AB}{3}.$$

Тогда:

$$a^2 = OA^2 + OB^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{5AB^2}{4} = 5\left(\frac{AB}{3}\right)^2 = 5OC^2.$$

Ответ. $OC = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Задача 5. В треугольнике KMN проведена высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найти высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

Ответ. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, R.

Задача 6. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найти длину отрезка CN, если катеты равны 1 и 4.

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Задача 7. В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $AB = c$, $BC = a$. Найти AC.

Ответ. $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{5}}$.

Благодаря этой задаче будет доказана **теорема**: *если две медианы треугольника, проведенные к сторонам a и c, взаимно перпендикулярны, то стороны треугольника связаны соотношением $a^2 + c^2 = 5b^2$.*

Верна и **обратная теорема**: *если в треугольнике стороны связаны соотношением $a^2 + c^2 = 5b^2$, то медианы, к сторонам a и c, взаимно перпендикулярны.*

Задача 8. В треугольнике ABC медианы AM и CL взаимно перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM.

Ответ. $\frac{1}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}$.

Задача 9. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны, основание AC равно 2, а угол при основании равен 30°. Из вершины A к боковой стороне BC проведены биссектриса AE и медиана AD. Найти площадь треугольника ADE.

Ответ. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

Задача 10. В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BK. Известно, что $\angle ABM = \frac{\pi}{4}$, $\angle CBM = \frac{\pi}{6}$, $AK = 6$. Найти KM.

Ответ. $3(\sqrt{2} - 1)$.