§9. Обобщенный метод интервалов.

Рациональными неравенствами называются неравенства, в левой и правой части которых находятся суммы отношений многочленов. Чтобы решить такое неравенство, нужно перенести все в левую часть, привести к общему знаменателю и разложить числитель и знаменатель на множители. Получившаяся слева функция непрерывна во всех точках, кроме нулей знаменателя. Отметим на числовой прямой нули числителя и нули знаменателя. Эти точки разбивают числовую прямую на промежутки (интервалы и полуинтервалы), причем на каждом промежутке функция непрерывна и не равна нулю. Следовательно, она либо больше нуля, либо меньше нуля. Чтобы определить знак функции на промежутке, достаточно определить знак функции в какой-нибудь одной точке из данного промежутка.

Задача 1. Решить неравенство $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решение. Находим корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$: $x = 1$ и $x = 3$. Найдем знаки функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на промежутках $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$ и $(3; +\infty)$. На первом промежутке при $x = 0$ имеем $f(0) = 3 > 0$, следовательно, $f(x) > 0$ (на рисунке 1 ставим знак "$-$"над полуинтервалом $(-\infty; 1)$); на втором $f(2) = -1 < 0$, следовательно, $f(x) < 0$; на третьем $f(10) = 100 - 40 + 3 > 0$, следовательно, $f(x) > 0$. Рисуем числовую прямую, отмечаем нули функции, над промежутками знакопостоянства отмечаем знак функции (см. рисунок 1).

Ответ: $(1; 3)$.

Заметим, что в задаче 1 функция $y = f(x)$ является параболой, ветви которой направлены вверх. Исходя из этого можно расставить "+" и "$-$" без подстановки.

рис.1 рис.2

Задача 2. Решить неравенство $\frac{3x}{x-1} \leq x + 4$.

Решение. Перенесем все в левую часть, приведем к общему знаменателю: $\frac{3x - x^2 - 3x + 4}{x-1} \leq 0$. Разложим на множители числитель: $\frac{(2-x)(2+x)}{x-1} \leq 0$. Отмечаем корни числителя ($x = 2$ и $x = -2$) закрашенными точками на числовой прямой (так как неравнство нестрогое), а корни знаменателя ($x = 1$) выколотыми (см. рисунок 2). Получаем 4 промежутка, определяем на них знак функции $f(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x-1}$: на первом $f(-3) = 1.25 > 0$, на втором $f(0) = -4 < 0$, на третьем $f(1.5) = 3.5 > 0$, на четвертом $f(3) = -2.5 < 0$.

Ответ: $[-2; 1) \cup [2; +\infty)$.

Зачем нужно раскладывать числитель и знаменатель на множители? Можно этого не делать, однако после разложения на множители удобнее определять знак функции на промежутках, особенно, если их много.

В некоторых задачах числовая прямая разбивается на большое число промежутков, и нахождение для каждого из них знака функции может занять немало времени. Возьмем неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, в котором числитель и знаменатель уже разложены на множители. Рассмотрим знаки на соседних промежутках $(a; b)$ и $(b; c)$. Возьмем число $x_1 \in (a; b)$ и число $x_2 \in (b; c)$. Когда мы будем вычислять знак $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ и знак $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$, то разные значения будут только для множителя $(x - b)^k$ (он может встречаться как в числителе, так и в знаменателе). Если степень $(x - b)$

нечетная, то знаки $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ и $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$ разные, а если четная, то одинаковые (если $(x-b)$ встречается в числителе и знаменателе одновременно, то смотрим на сумму степеней).

Задача 3. Решить неравенство

$$\frac{(x-2)^4(x-6)(x+2)^5}{(x-1)^3(x+5)^2} \geq 0.$$

Решение. Отмечаем на прямой нули числителя (закрашенные точки, так как неравенство нестрогое) и нули знаменателя (выколотые точки). Подставляем в $f(x) = \frac{(x-2)^4(x-6)(x+2)^5}{(x-1)^3(x+5)^2}$ число $x = 10$, получаем $f(10) > 0$, ставим "+" над промежутком $(6; +\infty)$. Затем двигаемся справа налево (см. рис. 3):

- при переходе через точку $x = 6$ функция $f(x)$ меняет знак, так как $x-6$ в нечетной (первой) степени; над $(2; 6)$ ставим "$-$";
- при переходе через точку $x = 2$ функция $f(x)$ не меняет знак, так как $x - 2$ в четной степени; над $(1; 2)$ снова ставим "$-$";
- при переходе через точку $x = 1$ функция $f(x)$ меняет знак, так как $x-1$ в нечетной степени; над $(-2; 1)$ ставим "+";
- при переходе через точку $x = -2$ функция $f(x)$ меняет знак, так как $x + 2$ в нечетной степени; над промежутком $(-5; -2)$ ставим "$-$";
- при переходе через точку $x = -5$ функция $f(x)$ не меняет знак, так как $x + 5$ в четной степени; над $(-\infty; -5)$ снова ставим "$-$". Делаем проверку: подставляем $x = -10$, получаем $f(-10) < 0$.

Осталось только выписать ответ. Так как неравенство нестрогое, то не забываем включить в ответ все точки, в которых функция равна нулю (то есть точки, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля).

Ответ: $[-2; 1) \cup \{2\} \cup [6; +\infty)$.

рис.3

рис.4

Задача 4. Решить неравенство $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 < 0$.

Решение. Уравнение $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$ имеет корень $x = -1$. Разложим $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4$ на множители, неравенство примет вид

$$(x+1)(4x^2 + x + 4) < 0.$$

Уравнение $4x^2+x+4 = 0$ не имеет корней. Следовательно, выражение $4x^2+x+4$ имеет постоянный знак, то есть $4x^2 + x + 4 > 0$, и на него можно поделить. Исходное неравенство принимает вид $x + 1 < 0$, то есть $x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

То, что $4x^2+x+4>0$, следует также из того, что

$$4x^2+x+4=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+4=(2x+\frac{1}{4})^2+3\frac{15}{16}>0.$$

Задача 5. Решить неравенство $4x^2-4x+1>0$.

Решение. Выражение $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$, причем равенство выполняется только при $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$.

Задача 6. Решить неравенство $x^7-8x^4-x^3+8<0$.

Решение. Так как

$$x^7-8x^4-x^3+8=x^4(x^3-8)-x^3+8=(x^4-1)(x^3-8)=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x-2)(x^2+2x+4),$$

то неравенство принимает вид

$$(x+1)(x-1)(x^2+1)(x-2)(x^2+2x+4)<0.$$

Так как $x^2+1>0$ и $x^2+2x+4>0$ для всех x, то на эти выражения можно поделить, после чего неравенство примет вид

$$(x+1)(x-1)(x-2)<0.$$

Отметим на числовой прямой прямой числа -1, 1 и 2 (см. риунок 4). Расставим "+"и "$-$", запишем ответ.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(1;2)$.

Задача 7. Решить неравенство $\frac{x^2-7x+6}{x^3+7x^2-8x}<0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители, получим

$$\frac{(x-1)(x-6)}{x(x-1)(x+8)}<0.$$

Отметим точки $x=1$, $x=6$, $x=0$ и $x=-8$ на прямой (см. рисунок 5), после чего на $x-1$ можно сократить. При $x\neq 1$ неравенство примет вид

$$\frac{x-6}{x(x+8)}<0.$$

Расставим знаки функции $f(x)=\frac{(x-1)(x-6)}{x(x-1)(x+8)}$ на прямой. Справа от 6 ставим "+"(подставим в $f(x)$, например, $x=10$).

При переходе через точку $x=6$ функция $f(x)$ меняет знак, так как множитель $(x-6)$ в нечетной степени; над $(1;6)$ ставим "$-$". При переходе через точку $x=1$ функция $f(x)$ не меняет знак, так как множитель $(x-1)$ мы сократили; над $(0;1)$ снова ставим "$-$".

При переходе через точку $x=0$ функция $f(x)$ меняет знак, так как множитель x в нечетной степени; над $(-8;0)$ ставим "+".

При переходе через точку $x=-8$ функция $f(x)$ меняет знак, так как множитель $x+8$ в нечетной степени; над $(-\infty;-8)$ ставим "$-$".

Ответ: $x\in(-\infty;-8)\cup(0;1)\cup(1;6)$.

Задача 8. Решить неравенство

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1<0. \tag{8}$$

рис.5

рис.6

Решение. Если мы попробуем найти корни уравнения $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$, то у нас ничего не получится. Например, рациональных корней у него нет (проверять нужно только ± 1). Однако, это очень простая задача. Сейчас покажем, что уравнение $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$ не имеет корней.

Заметим, что $x=-1$ не является решением неравенства. Так как числа 1, $-x$, x^2, $-x^3$, x^4, $-x^5$, x^6 образуют геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1+x^7}{1+x}$, то неравенство (8) эквивалентно неравенству

$$\frac{1+x^7}{1+x}<0.$$

Отмечаем на прямой нули числителя и знаменателя, расставляем знаки функции (см. рис. 6).

Ответ: Нет корней.

Утверждение. Для любого положительного числа a выполняется неравнство $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

Доказательство: преобразуем неравенство: перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{a^2-2a+1}{a}\geq 2,$$

то есть $\frac{(a-1)^2}{a}\geq 2$, то есть $a>0$.

Следствие. Для любого отрицательного числа a выполняется неравнство $a+\frac{1}{a}\leq -2$.

Задача 9. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2-x+1}+x^2-x\leq 1-(x^3-1)^2.$$

Решение. Обозначим $a=x^2-x+1$, получим

$$\frac{1}{a}+a\leq 2-(x^3-1)^2. \tag{9}$$

Заметим, что $a>0$ (дискриминант уравнения $x^2-x+1=0$ отрицательный). Следовательно, $\frac{1}{a}+a\geq 2$.

При этом, $2-(x^3-1)^2\leq 2$. Таким образом (9) выполняется только если обе части равны двум. Это возможно только при $x=1$.

Ответ: 1.

Задача 10. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^5-6}+x^5<10-x^2.$$

Решение. Обозначим $a=x^5-6$, получим

$$\frac{1}{a}+a<4-x^2. \tag{10}$$

При $a=0$ (то есть $x=\sqrt[5]{6}$) знаменатель равен нулю, неравенство не выполняется.

Пусть $a > 0$ (то есть $x > \sqrt[5]{6}$). Тогда, $\frac{1}{a} + a \geq 2$. При этом $x^2 > \sqrt[5]{36} > \sqrt[5]{32} > 2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a} + a \geq 2 > 4 - \sqrt[5]{36} > 4 - x^2,$$

то есть $x > \sqrt[5]{6}$ неравенство (10) не выполняется.

Пусть $a < 0$ (то есть $x < \sqrt[5]{6}$). Тогда, $\frac{1}{a} + a \leq -2$. При $x \in [-2; \sqrt[5]{6})$ неравенство (10) выполняется, так как $\frac{1}{a} + a \leq -2 < 0 \leq 4 - x^2$.

При $x < -2$ неравенство (10) выполняется, так как $x^5 + x^2 < x^2(x^3 - 1) < 0$, то есть

$$\frac{1}{x^5 - 6} + x^5 + x^2 < 10.$$

Ответ: $(-\infty, \sqrt[5]{6})$.